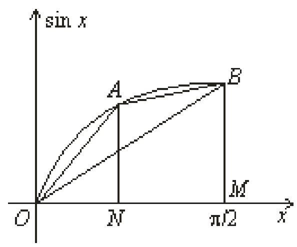
JOURNAL OF SCIENCE AND ARTS

GRAFICE DE FUNCTII SI INEGALTATI

DAN COMA

Consideram functia $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$, $f(x) = \sin x$, din al carei grafic rezulta imediat ca $S_{OAN} + S_{ANMB} \geq S_{OBM}$.



Exprimand ariile respective, obtinem:

$$x \sin x + (1 + \sin x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq \frac{\pi}{2}$$

de unde rezulta inegalitatea

(1) $$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}, \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Inegalitatea (1) poate fi usor generalizata pentru doua puncte x si $y$obtinand

(2) $$\frac{\sin x}{\sin y} > \frac{x}{y}, \quad 0 \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$$

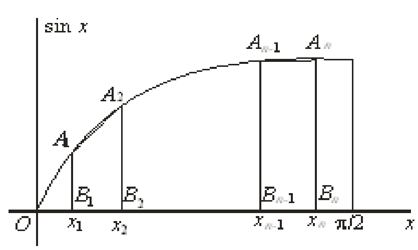
a carei demonstratie rezulta imediat din inegalitatea obtinuta din ariile figurilor geometrice formate.

Teorema 1.

(3) $$x_2 \sin x_1 + \ldots + x_n \sin x_{n-1} + x_1 \sin x_n > x_1 \sin x_2 + \ldots + x_{n-1} \sin x_n + x_n \sin x_1,$$

unde $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq \frac{\pi}{2}$.

Demonstratie.



Pe graficul functiei $\sin x$ alegem n puncte $x_1, x_2, \ldots, x_n$în conditiile din enunt si obtinem relatia

$$S_{A_1B_1B_2A_2} + \ldots + S_{A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n} > S_{A_1B_1B_nA_n}$$

si exprimand ariile obtinem

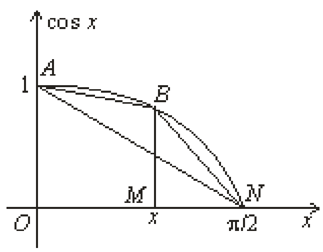
$$(\sin x_2 + \sin x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + (\sin x_{n-1} + \sin x_n)(x_n - x_1) > (\sin x_1 + \sin x_n)(x_n - x_1).$$

Efectuand calculele obtinem relatia (3) din enuntul teoremei.

Observatie. Punctele 0, 1, $\frac{\pi}{2}$ nu au fost luate în calcul deoarece ar fi dus la anularea simetriei inegalitatii.

Studiul functiei $\cos x$ pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ne ofera inegalitatea

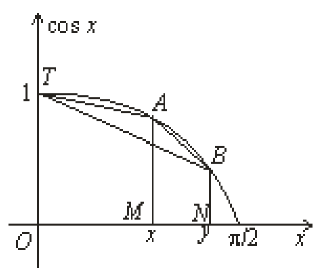
(4) $$\cos x \geq 1 - \frac{2x}{\pi}, \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



Pentru demonstratie folosim graficul functiei observand ca

$$S_{ABMO} + S_{BMN} \geq S_{ANO}$$

si exprimand ariile obtinem inegalitatea (4).



Considerand doua variabile x, y, astfel ca $0 \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$, avem

$$S_{TAMO} + S_{ABNM} \geq S_{TBNO}$$

de unde

$$x(\cos x + 1) + (y - x)(\cos y + \cos x) \geq y(\cos y + 1)$$

sau

$$x + y\cos x \geq y + x\cos y$$

de unde

(5) $$\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2 < \frac{x}{y}$$

Tinand cont de relatiile (2) si (5) obtinem

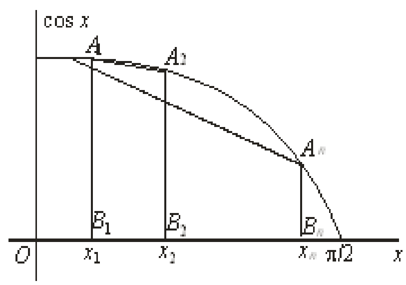
$$\frac{\sin x}{\sin y} > \frac{x}{y} > \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{y}{2}}\right)^2. \tag{6}$$

Teorema 2.

$$\begin{aligned} &x_2 \cos x_1 + x_3 \cos x_2 + \ldots + x_n \cos x_{n-1} + x_1 \cos x_n > \\ &> x_1 \cos x_2 + x_2 \cos x_3 + \ldots + x_{n-1} \cos x_{n-1} + x_n \cos x_n, \end{aligned} \tag{7}$$

unde $0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le \frac{\pi}{2}$.

Demonstratie. Se face asemanator ca la teorema 1 considerand n puncte în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, astfel ca $0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le \frac{\pi}{2}$.



Studiind ariile figurilor geometrice ce rezulta pe graficul functiei $\cos x$ obtinem

$$S_{A_1A_2B_2B_1} + \ldots + S_{A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}} > S_{A_1B_1B_nA_n}$$

si exprimand aceste arii obtinem inegalitatea (7) din enuntul teoremei 2.

O generalizare a celor doua teoreme o putem face considerand în locul functiilor $\sin x$ si $\cos x$ o functie $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ concava (convexa) si continua. Obtinem urmatoarea

Teorema 3.

$$\begin{aligned} &x_2 f(x_1) + x_3 f(x_2) + \ldots + x_n f(x_{n-1}) + x_1 f(x_n) > (<) \\ &> (<) x_1 f(x_2) + x_2 f(x_3) + \ldots + x_{n-1} f(x_n) + x_n f(x_1) \end{aligned} \tag{8}$$

unde $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$.

Demonstratia inegalitatii (8) se face asemanator cu demonstratiile celor doua teoreme. Semnul $>$ este pentru functii concave, iar $<$ este pentru functii convexe.

Aplicatii

1. Într-un triunghi ascutitunghic avem:

$$\sin A + \sin B + \sin C > 2.$$

Aplicand inegalitatea (1) avem $\sin A \ge \frac{2A}{\pi}$, $\sin B \ge \frac{2B}{\pi}$, $\sin C \ge \frac{2C}{\pi}$ si prin însumare acestora obtinem relatia de mai sus. Nu avem egalitate deoarece unghiurile unui triunghi nu pot fi toate drepte.

2. Într-un triunghi ascutitunghic avem:

$$\cos A + \cos B + \cos C > 1.$$

Se aplica inegalitatea (4) într-un triunghi ascutitunghic si se însumeaza.

3. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$, $0 < a < b < c$

Consideram functia convexa si aplicand inegalitatea (8) obtinem

$$b \cdot \frac{1}{a} + c \cdot \frac{1}{b} + a \cdot \frac{1}{c} < a \cdot \frac{1}{b} + b \cdot \frac{1}{c} + c \cdot \frac{1}{a}$$

care este inegalitatea din Manualul de matematica, clasa a IX-a, autor *Bogdan Enescu*.

Observatie. O generalizare a inegalitatii de mai sus este data de *D. M. Batinetu* în culegerea ,,Exercitii si probleme de matematica, cls. a XI-a si a XII-a".

Daca $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ sa se demonstreze

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}$$

unde $n \geq 1$.

4. Daca $1 < a < b < c$ atunci:

$$a^b \cdot b^c \cdot c^a > b^a \cdot c^b \cdot a^c$$

Consideram functia functie concava si putem scrie conform (8)

$$b \ln a + c \ln b + a \ln c > a \ln b + b \ln c + c \ln a$$

care devine dupa prelucrari, inegalitatea din enunt