JOURNAL OF SCIENCE AND ARTS

PROBLEME SPECTRALE PENTRU PERTURBĂRI NELINIARE ALE OPERATORULUI LUI LAPLACE

NICUŞOR COSTEA

ABSTRACT. Scopul lucrării este de a stabili rezultate de existenţă pentru probleme spectrale în care apar o clasă de operatori neliniari care perturbă operatorul lui Laplace. Demonstraţia noastră se bazează pe teorema de punct fix a lui Banach.

Cuvinte cheie: perturbare neliniară, problemă spectrală, prima valoare proprie a operatorului lui Laplace.

1. INTRODUCERE

În această lucrare suntem interesaţi de studiul unei probleme spectrale de tipul:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\mathcal{A}(\nabla u)) = \lambda u & , \text{ dacă } x \in \Omega \\ u = 0 & , \text{ dacă } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ este un domeniu mărginit cu frontiera netedă, $\lambda > 0$ şi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ este o funcţie.

În cazul în care $\mathcal{A}(\xi) = \xi$ oricare ar fi $\xi \in \mathbb{R}^N$ problema (1) devine

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & , \text{ dacă } x \in \Omega \\ u = 0 & , \text{ dacă } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Un număr real λ se numeşte *valoare proprie* pentru problema (2) dacă există $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ astfel încât

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_\Omega u\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Funţia u se numeşte *funcţie prorie* asociată valorii proprii λ.

Este cunoscut faptul (vezi Brezis [1], Teorema IX.31) că pentru problema (2) există un şir crescător de valori proprii $\{\lambda_n\}$ astfel încât $\lambda_n \to \infty$ când $n \to \infty$. Acest lucru implică că spectrul operatorului lui Laplace este *discret* pentru domenii mărginite cu frontiera netedă. Mai mult, este cunoscut faptul ca prima valoare proprie a operatorului lui Laplace, notată λ_1 satisface relaţia

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega |u|^2 \, dx}.$$

Se ştie deasemenea că λ_1 este simplă, adică subspaţiul propriu generat de funcţiile proprii corespunzătoare lui λ_1 are dimensiunea 1 (vezi Gilbarg şi Trudinger [2]). Se poate arăta că dacă $e_1(x)$ este o funcţie proprie corespunzătoare lui λ_1, atunci e_1 are semn constant pe Ω. Pe de altă parte celelalte valori proprii nu sunt simple (vezi Polya si Szego [3]).

În cazul nostru operatorul $\mathrm{div}(\mathcal{A}(\nabla u))$ care apare în problema (1) constituie o perturbare neliniară a operatorului lui Laplace. Vom presupune în continuare că $\mathcal{A}$ este de forma

$$\mathcal{A}(\xi) = (\mathcal{A}_1(\xi), \ldots, \mathcal{A}_N(\xi)), \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N,$$

cu $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ şi $\mathcal{A}_i(\xi) = h_i(\xi_i) + 2\xi_i$ oricare ar fi $\xi \in \mathbb{R}^N$ şi oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, N\}$. Funcţiile $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date care sunt de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$ şi satisfac pentru orice $i \in \{1, \ldots, N\}$ şi orice $t \in \mathbb{R}$

$$|h_i(t)| \leq 1 \text{ şi } |h_i'(t)| \leq 1.$$

Remarca 1. *Evidenţiem faptul că există funcţii care să satisfacă condiţiile puse asupra funcţiilor* h_i. *De exemplu putem considera* $h_i(t) = \cos t$, $h_i(t) = \sin t$ *sau* $h_i(t) = \frac{1}{\alpha+1} \cdot e^{-|t|} \cdot \sin(\alpha \cdot t)$ *cu* $\alpha > 0$.

Definiţia 1. *Spunem că* $\lambda \in \mathbb{R}$ *este valoare proprie pentru problema (1) dacă există* $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ *astfel încât*

$$\int_\Omega \mathcal{A}(\nabla u) \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_\Omega u \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Vom demonstra că operatorii de tipul celor descrişi mai sus posedă o familie continuă de valori proprii intr-o vecinătate la dreapta originii atunci când cel puţin una din funcţiile h_i nu se anulează în origine.

Teorema 1. *Presupunem că există* $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ *astfel încât* h_{i_0} *nu se anulează în origine. Atunci orice număr real* $\lambda \in (0, \lambda_1)$ *este valoare proprie pentru problema (1), unde* λ_1 *este prima valaore proprie a operatorului lui Laplace.*

Vom nota în continuare prin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produsul scalar din spaţiul Sobolev $H_0^1(\Omega)$ şi prin $\| \cdot \|$ norma corespunzătoare, adică

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx, \quad \|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Vom nota deasemenea prin $\| \cdot \|_{L^2}$ norma pe spaţiul Lebesgue $L^2(\Omega)$, adică

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_\Omega u^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

2. Demonstraţia Teoremei 1

Pentru a demonstra Teorema 1 vom utiliza o metodă întâlnită în demonstraţia unei versiuni neliniare a Teoremei Lax-Milgram (vezi Zeidler [4], Secţiunea 2.15). Demonstraţia utilizează ca unealtă matamatică teorema de punct fix a lui Banach (vezi Zeidler [4], Secţiunea 1.6).

Mai întâi, definim operatorii $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ prin

$$a(u, v) = \int_\Omega \mathcal{A}(\nabla u) \nabla v \, dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

şi $b_\lambda : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ prin

$$b_\lambda(u, v) = \int_\Omega uv \, dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Este suficient să arătăm că pentru orice $\lambda \in (0, \lambda_1)$ există $u \in H_0^1(\Omega)$ astfel încât

$$a(u, v) = b_\lambda(u, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Propoziţia 2. *Operatorul a verifică următoarele proprietăţi:*

: *(i) pentru orice* $w \in H_0^1(\Omega)$ *aplicaţia* $v \to a(w, v)$ *este liniară şi continuă pe* $H_0^1(\Omega)$*;*

: *(ii)* $\|u-v\|^2 \le a(u,u-v) - a(v,u-v)$, *pentru orice* $u, v \in H_0^1(\Omega)$;
: *(iii)* $|a(u,w) - a(v,w)| \le 3\|u-v\| \cdot \|w\|$, *pentru orice* $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Proof. (i) Fixăm $w \in H_0^1(\Omega)$. Este evident că aplicaţia $v \to a(w,v)$ este liniară. Pe de altă parte, utilizând inegalitatea lui Hölder avem

$$|a(w,v)| = \left| \int_\Omega \mathcal{A}(\nabla w)\nabla v \, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^N \int_\Omega h_i(w_{x_i}) v_{x_i} \, dx + 2\int_\Omega \nabla w \nabla v \, dx \right|$$

$$\le \sum_{i=1}^N \int_\Omega |h_i(w_{x_i})|\, |v_{x_i}| \, dx + 2\|w\| \cdot \|v\| \le \sum_{i=1}^N \int_\Omega |v_{x_i}| \, dx + 2\|w\| \cdot \|v\| \le (c + 2\|w\|)\|v\|$$

unde c este o constantă pozitivă. Rezultă că aplicaţia noastră e continuă.

(ii) Avem

$$\begin{aligned} a(u,u-v) - a(v,u-v) &= \int_\Omega [\mathcal{A}(\nabla u) - \mathcal{A}(\nabla v]\nabla(u-v) \, dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega [h_i(u_{x_i}) - h_i(v_{x_i})]\,(u_{x_i} - v_{x_i}) \, dx + 2\|u-v\|^2. \end{aligned}$$

Utilizând Teorema creşterilor finite şi ţinând cont că $|h_i'(t)| \le 1$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi orice $i \in \{1, \ldots, N\}$, deducem că

$$\begin{aligned} a(u,u-v) - a(v,u-v) &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega h_i'(\theta_i)(u_{x_i} - v_{x_i})^2 \, dx + 2\|u-v\|^2 \\ &\ge -\|u-v\|^2 + \|u-v\|^2 = \|u-v\|^2 \end{aligned}$$

unde $\theta_i(x) = \mu_i(x)u_{x_i}(x) + (1-\mu_i(x))v_{x_i}(x)$, oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, N\}$ şi oricare ar fi $x \in \Omega$ cu $\mu_i(x) \in [0,1]$.

(iii) Utilizând acelaşi argument ca mai sus avem

$$\begin{aligned} |a(u,w) - a(v,w)| &= \left| \int_\Omega [\mathcal{A}(\nabla u) - \mathcal{A}(\nabla v)]\nabla w \, dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^N \int_\Omega [h_i(u_{x_i}) - h_i(v_{x_i})]\, w_{x_i} \, dx + 2\int_\Omega \nabla(u-v)\nabla w \, dx \right| \\ &\le \sum_{i=1}^N \int_\Omega |h_i'(\theta_i)| \cdot |(u_{x_i} - v_{x_i})| \cdot |w_{x_i}| \, dx + 2\|u-v\| \cdot \|w\| \\ &\le \sum_{i=1}^N \int_\Omega |(u_{x_i} - v_{x_i})| \cdot |w_{x_i}| \, dx + 2\|u-v\| \cdot \|w\| \\ &\le 3 \cdot \|u-v\| \cdot \|w\|. \end{aligned}$$

□

Propoziţia 3. *Pentru orice $\lambda \in (0, \lambda_1)$ operatorul b_λ verifică proprietăţile:*

: *(i) b_λ este formă biliniară si continuă pe $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$;*

: *(ii) $b_\lambda(u, u) \geq 0$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$*

: *(iii) există $M > 0$ astfel încât*

$$|b_\lambda(u, w) - b_\lambda(v, w)| \leq M \cdot \|u - v\| \cdot \|w\|, \quad \forall u, v, w \in H_0^1(\Omega).$$

Proof. (i) Faptul că b_λ este biliniară este evident. Utilizând inegalitatea lui Hölder si faptul că spaţiul $H_0^1(\Omega)$ se scufundă continuu în $L^2(\Omega)$ obţinem

$$|b_\lambda(u, v)| \leq \lambda \cdot \|u\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} \leq c \cdot \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

unde c este o constantă pozitivă. Am obţinut deci ca b_λ este continuă.

(ii) Pentru orice $u \in H_0^1(\Omega)$ avem $b_\lambda(u, u) = \lambda \cdot \|u\|_{L^2}^2 \geq 0$.

(iii) Procedând la fel ca la punctul (i) obţinem

$$\begin{aligned} |b_\lambda(u, w) - b_\lambda(v, w)| &= \lambda \left| \int_\Omega (u - v) w \, dx \right| \leq \lambda \cdot \|u - v\|_{L^2} \cdot \|w\|_{L^2} \\ &\leq M \cdot \|u - v\| \cdot \|w\|, \quad \forall u, v, w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

unde M este o constantă pozitivă. Demonstraţia Propoziţiei 3 este astfel completă. □

Demonstraţia Teoremei 1.

Fie $\lambda \in (0, \lambda_1)$ fixat arbitar. Din Propoziţia 2 (i) şi Teorema lui Riesz deducem ca pentru fiecare $u \in H_0^1(\Omega)$ există un element pe care îl vom nota $Au \in H_0^1(\Omega)$ astfel încât

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Putem astfel defini operatorul $A : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$. Din Propoziţia 2 (ii) şi (iii) obţinem că A verifică proprietăţile

$$\|u - v\|^2 \leq \langle Au, u - v \rangle - \langle Av, u - v \rangle, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \tag{3}$$

adică A e tare monoton, şi

$$|\langle Au, w \rangle - \langle Av, w \rangle| \leq 3 \cdot \|u - v\| \cdot \|w\|, \quad \forall u, v, w \in H_0^1(\Omega) \tag{4}$$

Din relaţia (4) rezultă

$$\|Au - Av\| = \sup_{\|w\| \leq 1} |\langle Au, w \rangle - \langle Av, w \rangle| \leq 3 \cdot \|u - v\|, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{5}$$

Pe de altă parte, din Propoziţia 3 şi din teorema lui Riesz deducem că pentru orice $u \in H_0^1(\Omega)$ există un element notat $B_\lambda u \in H_0^1(\Omega)$ astfel încât

$$b_\lambda(u, v) = \langle B_\lambda u, v \rangle$$

Putem deci defini operatorul $B_\lambda : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$. Din Propoziţia 3 şi din caracterizarea variaţională a lui λ_1 obţinem că B_λ este un operator liniar care satisface următoarele:

$$\langle B_\lambda u, u - v \rangle - \langle B_\lambda v, u - v \rangle = b_\lambda(u - v, u - v) \leq \frac{\lambda}{\lambda_1} \|u - v\|^2, \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \tag{6}$$

şi pentru orice $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|B_\lambda u - B_\lambda v\| &= \sup_{\|w\| \leq 1} |\langle B_\lambda u - B_\lambda v, w \rangle| \\ &= \sup_{\|w\| \leq 1} |b_\lambda(u - v, w)| \leq M \cdot \|u - v\| \end{aligned} \tag{7}$$

Definim acum operatorul $S : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ prin

$$Su = u - t(Au - B_\lambda u)$$

unde $t \in \left(0, \frac{2(1-\lambda/\lambda_1)}{(3+M)^2}\right)$. Relaţiile (3), (5), (6), (7) arată că pentru orice $u, v \in H_0^1(\Omega)$ avem

$$\begin{aligned}
\|Su - Sv\|^2 &= \langle Su - Sv, Su - Sv\rangle \\
&= \langle (u-v) - t(Au - Av) + t(B_\lambda u - B_\lambda v), \\
&\quad (u-v) - t(Au - Av) + t(B_\lambda u - B_\lambda v)\rangle \\
&= \|u-v\|^2 - 2t\langle Au - Av, u - v\rangle + 2t\langle B_\lambda u - B_\lambda v, u - v\rangle \\
&- 2t^2\langle Au - Av, B_\lambda u - B_\lambda v\rangle + t^2\|Au - Av\|^2 + t^2\|B_\lambda u - B_\lambda v\|^2 \\
&\leq \|u-v\|^2 - 2t\|u-v\|^2 + 2t\frac{\lambda}{\lambda_1}\|u-v\|^2 + 2t^2\|Au - Av\|\|B_\lambda u - B_\lambda v\| \\
&+ t^2\|Au - Av\|^2 + 2t^2\|B_\lambda u - B_\lambda v\|^2 \\
&\leq \left(1 - 2t\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) + 6Mt^2 + 9t^2 + M^2t^2\right) \cdot \|u-v\|^2 = \alpha \cdot \|u-v\|^2
\end{aligned}$$

unde $\alpha = 1 - 2\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)t + (3+M)^2t^2 \geq 0$. Dacă $t = 0$ sau $t = \frac{2(1-\lambda/\lambda_1)}{(3+M)^2}$ atunci $\alpha = 1$. De aici rezultă că $\sqrt{\alpha} < 1$ pentru orice $t \in \left(0, \frac{2(1-\lambda/\lambda_1)}{(3+M)^2}\right)$. Deci,

$$\|Su - Sv\| \leq \sqrt{\alpha} \cdot \|u - v\|, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

adică S este contracţie de coeficient $\sqrt{\alpha} < 1$. Din teorema de punct fix a lui Banach obţinem că problema $u = Su$ are soluţie unică, de unde rezultă ca problema $Au = B_\lambda u$ are soluţie unică în $H_0^1(\Omega)$. Am obţinut astfel că

$$\langle Au, \varphi\rangle = \langle B_\lambda u, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

ceea ce ne arată că

$$\int_\Omega \mathcal{A}(\nabla u)\nabla\varphi \, dx = \lambda \int_\Omega u\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Mai rămâne să arătăm că u este netrivială. Observăm că operatorul B_λ se anulează în origine, în timp ce operatorul A nu se anulează în origine de unde rezultă că $u \neq 0$. Am obţinut astfel că orice $\lambda \in (0, \lambda_1)$ este valoare proprie pentru problema (1) şi demonstraţia Teoremei 1 este completă.

References

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*, Masson, Paris, 1992.

[2] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1983.

[3] G. Polya and G. Szego, *Isoperimetric inequalities in mathemathical physics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1951.

[4] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis: Applications in Mathematical Physics*, Springer-Verlag, New York,1995.

Departamentul de Matematică , Universitatea din Craiova,
1100 Craiova, România
E-mail address: nicusorcostea@yahoo.com