APROXIMAREA LOCALA "BUNA" IN MEF

GHEORGHE DOBOŞ

ABSTRACT. Ne propunem o aproximare locala a unei probleme la limita de tip eliptic care in functie de semnificatia fizica necesita calculul local al solutiei sau al gradientului in cadrul MEF.

Teorema 1. *Fie H un spatiu Hilbert real, $a(u,v)$, $b(u,v)$ doua produse scalare cu norme echivalente. Atunci exista $B : H \to H$ liniar si continu astfel incat $a(u,Bv) = b(u,v)$, pentru orice $u, v \in H$.*

Demonstratie : Existenta, liniaritatea rezulta din Teorema lui Riesz.

Continuitatea : $a(Bu,Bu) = b(u,Bu) \leq \|u\|_b \|Bu\|_b \leq K^2 \|u\|_a \|Bu\|_a$

$$\|Bu\|_a^2 \leq K^2 \|u\|_a \|Bu\|_a$$
$$\|Bu\|_a \leq K^2 \cdot \|u\|_a$$

(unde K constanta de echivalenta a normelor) rezulta B continua ;

Teorema 2. *Daca $u^* \in H$; V_h subspatiu inchis de aproximare si $BV_h = V_h$ atunci proiectia lui u^* pe V_h in $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ coincid.*

Demonstratie :

$$a(u^* - u_h,\ Bv_h) = b(u^* - u_h, v_h) \quad \textit{pentru orice } v_h \in V_h$$
$$(u^* - u_h) \quad \perp_a \quad \textit{pe } V_h$$
$$(u^* - u_h) \quad \perp_b \quad \textit{pe } V_h$$

rezulta u_h element de cea mai buna aproximare a lui u^* in $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ prin elementele lui V_h.

Aplicatie : Daca u^* este solutie a problemei $a(u,v) = f(v)$ pentru orice $v \in H$(f liniara si continua pe H) atunci u^* este solutie a problemei $b(u,v) = f(Bv)$ pentru orice $v \in H$.

Rezulta $\min\limits_{v_h \in V_H} b(u^* - v_h,\ u^* - v_h)$ este solutie a problemei $b(u_h, v_h) = f(Bv_h)$.

Avem in vedere $b(u,v)$ de forma $a_K(u,v) = a(u,v) + Kc(u,v)$; $K > 0$ unde $c(u,v)$ biliniara, simetrica, semipozitiva pe H, majorata de $\alpha^2 \|\cdot\|_a$, unde $\|\cdot\|_{a_K}$ *si* $\|\cdot\|_a$ sunt echivalente.

Sa mai observam ca proiectia unui $u^* \in H$ pe un subspatiu in $\|\cdot\|_a$ si in $K\|\cdot\|_a$, $(K > 0)$ coincid.

Teorema 3. *V_h subspatiu inchis in H, $u^* \in H$, u_h^c una din proiectiile lui u^* pe V_h in $\|\cdot\|_{a_K}$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, exista K_ε astfel incat $K > K_\varepsilon$* si

$$c(u^* - u_h^k, u^* - u_h^k) \leq \varepsilon + c(u^* - u_h^c, u^* - u_h^c)$$

Demonstratie :

$$\begin{aligned} c(u^* - u_h^c, u^* - u_h^c) &\leq \varepsilon + c(u^* - u_h^k, u^* - u_h^k) \leq \\ &\leq \tfrac{a(u^* - u_h^k, u^* - u_h^k)}{k} + c(u^* - u_h^k, u^* - u_h^k) \leq \\ &\leq \tfrac{a(u^* - u_h^c, u^* - u_h^c)}{k} + c(u^* - u_h^c, u^* - u_h^c) \end{aligned}$$

de underezulta afirmatia.

Comentariu :

Desigur proiectia unui element pe un subspatiu depinde si de subspatiu si de norma de proiectie. In acelasi timp proiectia produce o pierdere de informatie ce trebuie facuta cat mai mica pe directia de interes. In acest sens $c(u, v)$ ar trebui sa genereze local o norma in care doresc sa apreciez eroarea.

Consideram o problema de aproximare cu elemente finite pe un domeniu $D \subset \Omega$. Fie V_H si V_h doua subspatii de aproximare de element finit cu $V_H \subset V_h$si $V_H/_D = V_h/_D$

in sensul ca pentru orice $v \in V_h$ exista $v_1 \in V_H$ astfel incat $V_\backslash/_D = V_1/_D$ (restrictiile coincid pe D).

Presupunem ca u_H^c si u_h^c coincide (pentru un u^*dat) atunci

$$\begin{aligned} c(u^* - u_h^c, u^* - u_h^{ck}) &= c(u^* - u_H^c, u^* - u_H^c) \leq \\ &= b(u^* - u_H^k, u^* - u_H^k) \leq \\ &= c(u^* - u_H^k, u^* - u_H^k) + \tfrac{a(u^* - u_H^k, u^* - u_H^k)}{k} \\ &\leq b(u^* - u_H^c, u^* - u_H^c) + \tfrac{a(u^* - u_H^c, u^* - u_H^c)}{k} \end{aligned}$$

adica pentru $k$suficient de mare proiectiile in $\|\cdot\|_{a_k}$pe $V_H$si V_h pot deveni suficient de apropiate de u_h^c pe care il dorim.

References

[1] P. Ciarlet, *Numerical Analysis of the finite element method,* ed.Université Moutréal , 1976.

[2] G. Duvaut, *Mécanique des milieux continues,* Masson, Paris, 1990.

[3] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires,* Ed Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[4] S. Sburlan, D. Pascali, *Nonlinear Mappings of Monotone Type*, Ed.Acad. Rom.- Sijhoff & Noordhoff Int. Publ.,1978.

Ovidius University Constanţa,
Bd. Mamaia nr.124, Constanţa, Romania