

O ABORDARE CU DESCOMPUNERE DE DOMENII A UNEI PROBLEME
DE MAGNETO-HIDRO-DINAMICĂ

EMIL LUNGU AND ALIN POHOATA

ABSTRACT. This paper deals with the flow of a viscous conducting fluid in a pipe with arbitrary cross-section and arbitrary wall conductivities under the influence of a transverse magnetic field. For the numerical solution a finite element discretization is considered in the domain corresponding to the fluid and inside the walls of the pipe. When the outer medium is considered with an arbitrary conductivity the finite element method is coupled with the boundary element method. The proposed method is illustrated with numerical example.

Key words and phrase: MHD pipe flow, finite element method, boundary element method

1. INTRODUCERE

Considerăm un tub drept cilindric cu pereți de grosime constantă și având o lungime suficientă (vezi Fig.1), astfel încât efectele în capete să fie neglijate. Presupunem prin interiorul tubului curge un fluid viscos, incompresibil ce are permitivitatea electrică și permeabilitatea magnetică apropiate de ale mediului înconjurător. ($\varepsilon \approx \varepsilon_0$, $\mu \approx \mu_0$). Relația $\mu \approx \mu_0$ este de asemenea considerată în interiorul pereților tubului. Inducția magnetică adimensională și intensitatea câmpului electric la infinit sunt presupuse a fi perpendiculare pe axa tubului. Presupunem de asemenea că axa Oz coincide cu axa tubului iar axa Ox este paralelă cu inducția magnetică la infinit.

2. PROBLEMA MODEL

Notăm cu Ω_1 regiunea ocupată de fluid, cu Ω_2 peretele regiunii și cu Ω_3 regiunea exterioară. De asemenea mai notăm cu $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$, $i \neq j$ și cu $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2$.

Ecuțiile fluidului continuu magnetic în variabile adimensionale sunt:

- Ecuația de continuitate

$$(1) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0$$

- Ecuațiile Navier - Stokes

$$(2) \quad (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{V} + R_h \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

- Ecuațiile Maxwell

$$(3) \quad \operatorname{curl} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{curl} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

- Legea lui Ohm

$$(4) \quad \mathbf{J} = R_m (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

unde am folosit notațiile

- $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ inducția magnetică adimensională

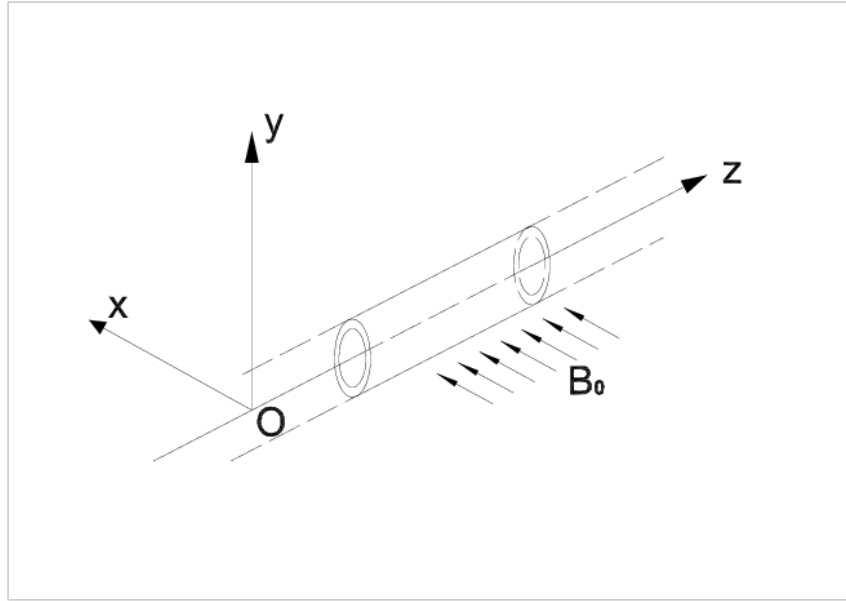


FIGURE 1. Problema model

- $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ intensitatea câmpului electric adimensională
- $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ intensitatea curentului
- p presiunea adimensională
- R_e numărul Reynolds
- R_h numărul de presiune magnetică
- R_m numărul magnetic Reynolds
- $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ viteza adimensională a fluidului

Adăugăm acum condiția de nealunecare $\mathbf{V}|_{\Gamma_{12}} = 0$ și condițiile de transmisie

$$(5) \quad [\mathbf{E}]_{\Gamma_{12}} \cdot \mathbf{s} = 0, \quad [\mathbf{B}]_{\Gamma_{12}} \cdot \mathbf{s} = 0, \quad [\mathbf{B}]_{\Gamma_{12}} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad [\mathbf{J}]_{\Gamma_{12}} \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$(6) \quad [\mathbf{E}]_{\Gamma_{23}} \cdot \mathbf{s} = 0, \quad [\mathbf{B}]_{\Gamma_{23}} \cdot \mathbf{s} = 0, \quad [\mathbf{B}]_{\Gamma_{23}} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad [\mathbf{J}]_{\Gamma_{23}} \cdot \mathbf{n} = 0$$

unde \mathbf{n} și \mathbf{s} sunt vectorii normali și tangenți la interfețele respective.

Presupunem acum că mișcarea fluidului datorată gradientului presiunii de-a lungul tubului și vectorii \mathbf{V} și \mathbf{B} nu depind de variabila z , i.e.

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{V}, \mathbf{B}) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{R_e}$$

Mai presupunem de asemenea că câmpul vitezei are componentă nenulă doar pe axa Oz adică

$$(8) \quad \mathbf{V} = (0, 0, V_z).$$

Presupunerile de mai sus ne permit să reducem problema la următorul sistem de ecuații

$$(9) \quad \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{V} + R_h (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = P$$

$$(10) \quad \Delta \mathbf{B} + R_m (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} = 0$$

unde $P = p + R_h \frac{\mathbf{B}^2}{2}$ reprezintă presiunea totală. Ecuația (9) este considerată în Ω_1 iar (10) este valabilă pentru întregul spațiu cu \mathbf{V} egal cu zero pe domeniile Ω_2 and Ω_3 .

3. ABORDAREA CU DESCOMPUNERE DE DOMENII

Problemele 9 și 10 pot fi separate în două probleme independente. Găsirea lui B_x și B_y este simplă. A doua problemă constă în a găsi B_z și V_z și este descrisă de sistemul:

$$(11) \quad \Delta V(x, y) + R_e R_h \frac{\partial B_1}{\partial x} = -1 \quad (x, y) \in \Omega_1$$

$$(12) \quad \Delta B_1(x, y) + R_{m1} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (x, y) \in \Omega_1$$

$$(13) \quad \Delta B_2(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Omega_2$$

$$(14) \quad \Delta B_3(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Omega_3$$

împreună cu condițiile

$$(15) \quad V(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_{12}$$

$$(16) \quad B_1(x, y) = B_2(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma_{12}$$

$$(17) \quad \frac{1}{R_{m1}} \frac{\partial B_1}{\partial n_1}(x, y) = -\frac{1}{R_{m2}} \frac{\partial B_2}{\partial n_2}(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma_{12}$$

$$(18) \quad B_2(x, y) = B_3(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma_{23}$$

$$(19) \quad \frac{1}{R_{m2}} \frac{\partial B_2}{\partial n_2}(x, y) = -\frac{1}{R_{m3}} \frac{\partial B_3}{\partial n_3}(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma_{23}$$

$$(20) \quad \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} B_3(x, y) = 0$$

unde n_i este normala exterioară la $\partial\Omega_i$. Pentru a ușura notațiile am eliminat indicele z pentru B_z și V_z . Indicile i al lui B se referă la subdomeniul Ω_i .

Pentru început vom considera cazul unui tub de conductivitate arbitrară într-un mediu perfect izolator, ceea ce implică faptul că $B_3 = 0$. Problema model va consta astfel în ecuațiile (11), (12), (13) împreună cu condițiile de transmisie pe interfață (16), (17) și condițiile pe frontieră (15) and $B_2(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma_{23}$.

Putem sparge problema redusă în două subprobleme. Mai întâi să rezolvăm problema Dirichlet

Să se găsească V astfel încât :

$$(21) \quad \begin{cases} -\frac{1}{R_e R_h} \Delta V(x, y) = \frac{\partial B_1}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{R_e R_h} & (x, y) \in \Omega_1 \\ V(x, y) = 0 & (x, y) \in \Gamma_{12} \end{cases}$$

și problema de descompunere a domeniilor:

Să se găsească B_1 și B_2 astfel încât

$$(22) \quad \begin{cases} -\frac{1}{R_{m1}} \Delta B_1(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) & (x, y) \in \Omega_1 \\ -\frac{1}{R_{m2}} \Delta B_2(x, y) = 0 & (x, y) \in \Omega_2 \\ B_1(x, y) = B_2(x, y) & (x, y) \in \Gamma_{12} \\ B_2(x, y) = 0 & (x, y) \in \Gamma_{23} \\ \frac{1}{R_{m1}} \frac{\partial B_1}{\partial n_1}(x, y) + \frac{1}{R_{m2}} \frac{\partial B_2}{\partial n_2}(x, y) = 0 & (x, y) \in \Gamma_{12} \end{cases}$$

Am văzut că această problemă (22) este echivalentă în sens slab cu

$$(23) \quad \begin{cases} \beta(x, y) \Delta B(x, y) = g(V, x, y) & (x, y) \in \Omega \\ B(x, y) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

unde

$$(24) \quad g(V, x) = \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) & \text{pentru } (x, y) \in \Omega_1 \\ 0 & \text{pentru } (x, y) \in \Omega_2 \end{cases},$$

β este o funcție constantă pe porțiuni $\beta(x, y) = \frac{1}{R_{mi}}$ pentru $(x, y) \in \Omega_i$ și $B|_{\Omega_i} = B_i$ pentru $i=1,2$.

4. DISCRETIZAREA CU ELEMENTE FINITE

Presupunem ca avem o triangulare global cvasi-uniformă \mathcal{T}_h a domeniului Ω astfel încât fiecare subdomeniu Ω_i să poată fi scris ca o reuniune de elemente din \mathcal{T}_h . Fie

$$\tilde{X}_h(\Omega) = span\{\phi_k\}_{k=1}^{\tilde{M}} \subset H_0^1(\Omega)$$

un spațiu de elemente finite, generat de funcțiile liniare pe porțiuni și continue ϕ_k ce se anulează pe frontiera $\partial\Omega$,

$$\tilde{X}_h(\Omega_i) = span\{\phi_{k,i}\}_{k=1}^{\tilde{M}_i} \subset H_0^1(\Omega_i)$$

for $i=1,2$ restricțiile lui $\tilde{X}_h(\Omega)$ la domeniile Ω_i și

$$X_h(\Gamma_{12}) = span\{\varphi_k\}_{k=1}^M \subset \tilde{X}_h(\Omega)$$

spațiul conform de elemente finite generat de baza nodală φ_k , provenită din discretizarea interfeței Γ_{12} .

Observăm că

$$(25) \quad \tilde{X}_h(\Omega) = \tilde{X}_h(\Omega_1) \oplus \tilde{X}_h(\Omega_2) \oplus X_h(\Gamma_{12})$$

Discretizarea Galerkin a problemei noastre conduce la sistemul algebric

$$(26) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{R_e R_h} K_{II}^1 & D_{II} & 0 & D_{I\Gamma} \\ D_{II} & \frac{1}{R_{m1}} K_{II}^1 & 0 & \frac{1}{R_{m1}} K_{I\Gamma}^1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_{m2}} K_{II}^2 & \frac{1}{R_{m2}} K_{I\Gamma}^2 \\ D_{\Gamma I} & \frac{1}{R_{m1}} K_{I\Gamma}^1 \top & \frac{1}{R_{m2}} K_{I\Gamma}^2 \top & K_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V} \\ \underline{B}_{I,1} \\ \underline{B}_{I,2} \\ \underline{B}_{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu matricile bloc definite de

$$(27) \quad K_{II}^i[m, n] := \int_{\Omega_i} \nabla \phi_{n,i}(x, y) \nabla \phi_{m,i}(x, y) dx dy$$

$$(28) \quad K_{I\Gamma}^i[m, k] := \int_{\Omega_i} \nabla \varphi_k(x, y) \nabla \phi_{m,i}(x, y) dx dy$$

$$(29) \quad K_{\Gamma\Gamma}^i[l, k] := \int_{\Omega_i} \frac{1}{R_{mi}} \nabla \varphi_k(x, y) \nabla \varphi_l(x, y) dx dy$$

$$(30) \quad K_{\Gamma\Gamma} = K_{\Gamma\Gamma}^1 + K_{\Gamma\Gamma}^2$$

pentru toți $k, l = 1, \dots, M$ și $m, n = 1, \dots, \tilde{M}_i, i=1,2$. Matricile D_{II} , $D_{\Gamma I}$ și $D_{I\Gamma}$ sunt definite după cum urmează:

$$(31) \quad D_{II}[n, m] = \int_{\Omega_1} \frac{\partial \phi_{m,1}(x, y)}{\partial x} \phi_{n,1}(x, y) dx dy$$

$$(32) \quad D_{\Gamma I}[k, m] := \int_{\Omega_1} \frac{\partial \phi_{m,1}(x, y)}{\partial x} \varphi_k(x, y) dx dy$$

$$(33) \quad D_{I\Gamma}[m, k] := \int_{\Omega_1} \frac{\partial \varphi_k(x, y)}{\partial x} \phi_{m,1}(x, y) dx dy$$

pentru toți $k = 1, \dots, M$ and $m, n = 1, \dots, \bar{M}_1$.

Vectorul rezultat este dat de:

$$(34) \quad f_{(m)} := \frac{1}{R_e R_h} \int_{\Omega_1} \phi_{m,1}(x, y) dx dy$$

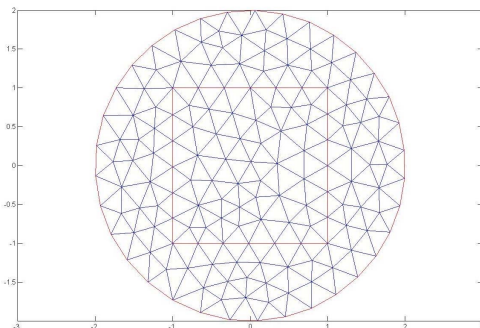


FIGURE 2. Domeniu

Pentru aplicația numerică considerăm $\Omega_1 = [-1, 1]^2, \Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \setminus \Omega_1$ (vezi Fig. 2) și considerăm parametrii problemei după cum urmează $R_e = 1, R_h = 10, R_{m_1} = 10$ și $R_{m_2} = 1$. Figurile (4), (4) arată aproximațiile lui V_z și respectiv B_z .

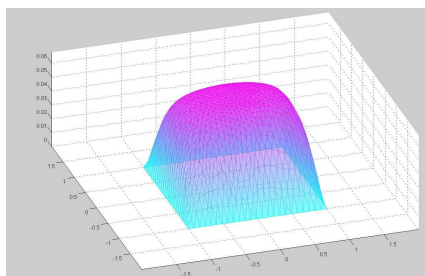


FIGURE 3. V_z

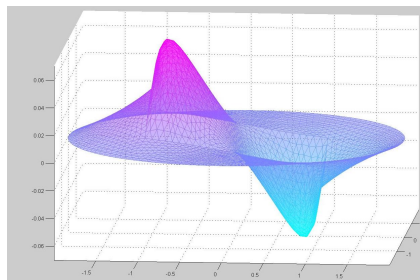


FIGURE 4. B_z

5. CUPLAREA METODEI ELEMENTELOR FINITE CU METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ

Să ne întoarcem acum la problema inițială (11)-(20) unde B_i satisface ecuația lui Laplace pe $\Omega_i, i = 2, 3$. Considerăm acum condițiile de transmisie pentru B_i și derivata conormală a acestuia pe interfața Γ_{23} și obținem că

$$(35) \quad \frac{1}{R_{m_2}}(S_2 B_2)(t) + \frac{1}{R_{m_3}}(S_3 B_3)(t) = 0 \quad \text{pentru } t \in \Gamma_{23}$$

Acum avem de rezolvat problema variațională de a găsi $B \in H^{1/2}(\Gamma_{2,3})$ astfel încât

$$(36) \quad \sum_{i=2}^3 \int_{\Gamma_{2,3}} \frac{1}{R_{m_i}} (\tilde{S}_i B)(t) v(t) ds_t = 0$$

pentru orice $v \in H_0^{1/2}(\Gamma_{23})$.

Discretizarea Galerkin a problemei (36) cu elemente de frontieră în Ω_3 și elemente finite în Ω_2 conduce la sistemul linear

$$(37) \quad A_1^\top S_{2,h}^{FEM} A_1 \underline{B}_{\Gamma_{23}} + A_2^\top S_{3,h}^{BEM} A_2 \underline{B}_{\Gamma_{23}} = 0,$$

unde matricile $S_{i,h}^{FEM/BEM}$ reprezintă discretizările operatorului Steklov-Poincaré cu elemente finite sau de frontieră iar A_i reprezintă matricile de conectivitate. Acest sistem cuplat cu sistemul (26) conduce la soluția discretă Galerkin a problemei generale (11)-(20).

Pentru domeniile definite mai sus prezentăm în figura (5) viteza ca parte a soluției problemei Galerkin asociate problemei (11)-(20) unde am folosit discretizarea cu elemente finite în Ω_1 și Ω_2 și elemente de frontieră în Ω_3 .

Figura (6) reprezintă inducția.

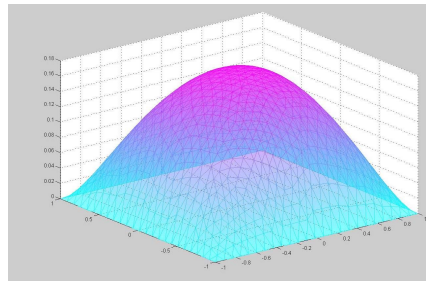


FIGURE 5. V_z

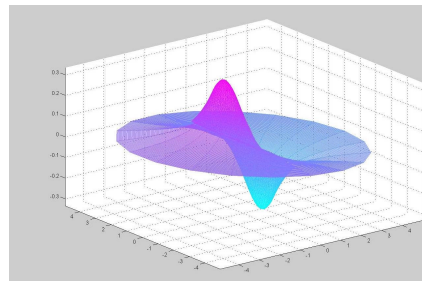


FIGURE 6. B_z

REFERENCES

- [1] Carabineanu, A. et al. The application of the boundary element method to the magnetohydrodynamic duct flow, *ZAMP*, 46, 1995
- [2] Carabineanu, A., Lungu, E. Pseudospectral Method for MHD Pipe Flow, *Intern. Journ. for Num. Meth. in Engrg.*,(submitted)
- [3] Carabineanu, A., Lungu, E. Numerical investigation of the MHD duct flow, *1st International Conference "Computational Mechanics and Virtual Engineering" COMEC 2005 20 - 22 October 2005, Brasov, Romania*
- [4] Dragos, L. *Magneto-fluid Dynamics* Ed. Acad. Bucharest, Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent 1975.
- [5] Langer, U., Steinbach, O. Coupled boundary and finite element tearing and interconnecting methods. In: Domain Decomposition Methods in Science and Engineering (R. Kornhuber, R. Hoppe, J. Periaux, O. Pironneau, O. Widlund, J. Xu eds.). *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 40, Springer, Heidelberg, pp. 83–97, 2004.
- [6] Langer, U., Pohoata, A., Steinbach, O. Application of Preconditioned Coupled FETI/BETI Solvers to 2D Magnetic Field Problems, SFB F013 Report 2004-23, Sept. 2004.
- [7] Meir, A.J. Finite element analysis of magnetohydrodynamic pipe flow, *Appl. Math. and Comp.*, vol. 57, 1993
- [8] Steinbach, O. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Finite Elemente und Randelemente*. B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2003.
- [9] Toselli, A., Widlund, O. *Domain Decomposition Methods—Algorithms and Theory*. Springer Verlag 2005
- [10] Valli, A., Quateroni, A. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Oxford Science Publications 1999

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, VALAHIA UNIVERSITY OF TÂRGOVIȘTE,
 BD. UNIRII 18-24, TÂRGOVIȘTE, ROMANIA
 E-mail address: emil.lungu@hotmail.com ; alinpohoata@yahoo.com