GENERALIZAREA UNEI INEGALITĂŢI, DE LA BARAJUL O.B.M.J 2006

OLARU ION MARIAN[1], OLARU VASILICA[2]

ABSTRACT. Vom prezenta în această lucrare o generalizare a urmatoarei inegalităţi:
Fie x, y, z trei numere reale strict pozitive, astfel încât:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=2.$$

Să se arate că $8xyz \leq 1$.

Vom demonstra urmatoarele rezultate:

1. Fie $\alpha, \beta,\ x_i > 0,\ i=\overline{1,n}$ astfel încât

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+\alpha}{x_i+\beta}=\frac{\beta+(n-1)\alpha}{\beta}.$$

Atunci

$$\prod_{i=1}^{n}x_i \leq \frac{\beta^n}{(n-1)^n}.$$

2. Fie $a, b, c, d,\ x_i > 0,\ i=\overline{1,n}$ astfel încât

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{ax_i+b}{cx_i+d}=\frac{ad+(n-1)bc}{cd}.$$

Atunci

$$\prod_{i=1}^{n}x_i \leq \frac{d^n}{c^n(n-1)^n}.$$

1. Introducere

La cel de-al cincilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică de Juniori din data de 20 mai 2006 a fost dată următoarea inegalitate

Fie x, y, z trei numere reale strict pozitive, astfel încât:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=2.$$

Să se arate că $8xyz \leq 1$.

În Gazeta Matematică nr. 5/2007, M. Lascu, C. Lupu prezintă un set de şapte soluţii pentru problema de mai sus. În cele ce urmează vom prezenta o generalizare a inegalităţii de mai sus.

2. Rezultate principale

Propoziţia 2.1. *Fie $\alpha, \beta,\ x_i > 0,\ i=\overline{1,n}$ astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+\alpha}{x_i+\beta}=\frac{\beta+(n-1)\alpha}{\beta}.$$

Atunci

$$\prod_{i=1}^{n}x_i \leq \frac{\beta^n}{(n-1)^n}.$$

Demonstraţie: Pentru $i = 1, n$, substituţiile

$$x_i = \frac{\beta y_i}{\sum\limits_{j=1, j \neq i}^{n} y_j},$$

verifică relaţia din ipoteză. Prin urmare inegalitatea pe care trebuie s-o demonstră se transformă în

$$\prod_{i=1}^{n} y_i \leq \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1, j \neq i}^{n} y_j}{(n-1)^n},$$

rezultat ce se utilizând inegaliatea mediilor.

Propoziţia 2.2. *Fie* a, b, c, d*,* $x_i > 0$*,* $i = \overline{1, n}$ *astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a x_i + b}{c x_i + d} = \frac{ad + (n-1)bc}{cd}.$$

Atunci

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{d^n}{c^n (n-1)^n}.$$

Demonstraţie: Se ia în Propoziţia 2.1 $\alpha = \dfrac{b}{a}$, $\beta = \dfrac{d}{c}$.

Remarca 2.1. *Alegem* $a_m = \frac{1}{m}$*,* $b = c = d = 1$*,* $n = 3$ *prin trecere la limită pentru* $m \longrightarrow \infty$*, se obţine inegalitatea dată la O.B.M.J 2006.*

References

[1] C. Lupu, M. Pascu *Asupra unei inegalităti date la OBMJ 2006* Gazeta Matematică nr. 5/2007

[1] Mathematics Department, University Lucian Blaga,
str. Dr. I.Ratiu, No.5-7, 550024, Sibiu, Romania
E-mail address: olaruim@yahoo.com

[2] School of Iacobeni, Sibiu,
Sibiu, Romania
E-mail address: olarv2@yahoo.com