JOURNAL OF SCIENCE AND ARTS

STUDIU ASUPRA COALGEBREI DE INCIDENTA

GEORGIANA VELICU

ABSTRACT. In aceasta lucrare sunt studiate proprietati ale coalgebrei de incidenta kS definita pentru o multime partial ordonata P. In acest sens se vor gasi conditii pentru care coalgebra de incidenta kS este coalgebra semiperfecta, coalgebra quasi-co-Frobenius si coalgebra co-Frobenius. De asemenea, sunt construite filtrarea coradical si filtrarea dupa lungime pentru kS si se demonstreaza ca cele doua filtrari coincid. In finalul lucrarii notiunea de coalgebra de incidenta a unei multimi partial ordonate este generalizata pentru cazul familiilor de multimi partial ordonate.

1. Descrierea coalgebrei de incidenta.

Fie $(P, \leq)$ o multime partial ordonata. Presupunem ca multimea P este local finita, adica oricare ar fi $x, y \in P$astfel incat $x \leq y$, rezulta ca multimea $[x, y] = \{z \in P \,|x \leq z \leq y\}$ este finita. Notam cu $S = \{[x, y] \,|x, y \in P, x \leq y\}$.

Fie k un corp comutativ. Fie kS spatiul vectorial peste k cu baza S.

Obtinem $kS = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{[x_i,y_i]} \, [x_i, y_i] \left| [x_i, y_i] \in S, a_{[x_i,y_i]} \in k, n \in \mathrm{N} \right. \right\}$. Pe acest spatiu vectorial definim o structura de coalgebra astfel:

$$\Delta : kS \to kS \otimes kS \quad ,$$

$$\varepsilon : kS \to k \quad , \quad \varepsilon\left([x, y]\right) = \delta_{x,y}.$$

$(kS, \Delta, \varepsilon)$ se numeste ***coalgebra de incidenta*** a multimii partial ordonate P.

Intr-adevar comultiplicarea Δ verifica $(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$, iar counitatea$\varepsilon$ verifica relatia $(I \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta$, adica diagramele de mai jos sunt comutative:

$$\begin{tikzcd}
kS \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & kS \otimes kS \arrow[d, "I \otimes \Delta"] \\
kS \otimes kS \arrow[r, "\Delta \otimes I"'] & kS \otimes kS \otimes kS
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& kS \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
k\otimes kS & & kS\otimes k \\
& kS\otimes kS \arrow[ul, "\varepsilon\otimes I"] \arrow[ur, "I\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Astfel, avem

$$(\Delta\otimes I)\circ\Delta\left([x,y]\right)=(\Delta\otimes I)\left(\sum_{x\le z\le y}[x,z]\otimes[z,y]\right)=\sum_{x\le z\le y}\Delta\left([x,z]\right)\otimes[z,y]=$$

$$=\sum_{x\le z\le y}\sum_{x\le t\le z}[x,t]\otimes[t,z]\otimes[z,y]$$

$$(I\otimes\Delta)\circ\Delta\left([x,y]\right)=(I\otimes\Delta)\left(\sum_{x\le z\le y}[x,z]\otimes[z,y]\right)=\sum_{x\le z\le y}[x,z]\otimes\Delta\left([z,y]\right)=$$

$$=\sum_{x\le z\le y}\sum_{z\le t\le y}[x,z]\otimes[z,t]\otimes[t,y],$$

de unde rezulta ca $(\Delta\otimes I)\circ\Delta=(I\otimes\Delta)\circ\Delta$.

De asemenea,

$$(I\otimes\varepsilon)\circ\Delta\left([x,y]\right)=(I\otimes\varepsilon)\left(\sum_{x\le z\le y}[x,z]\otimes[z,y]\right)=\sum_{x\le z\le y}[x,z]\otimes\varepsilon\left([z,y]\right)=$$

$$=\sum_{x\le z\le y}[x,z]\otimes\delta_{z,y}=[x,y]\otimes 1$$

$$(\varepsilon\otimes I)\circ\Delta\left([x,y]\right)=(\varepsilon\otimes I)\left(\sum_{x\le z\le y}[x,z]\otimes[z,y]\right)=\sum_{x\le z\le y}\varepsilon\left([x,z]\right)\otimes[z,y]=$$

$$=\sum_{x\le z\le y}\delta_{x,z}\otimes[z,y]=1\otimes[x,y]\,,$$

iar cum $[x,y]\otimes 1=1\otimes[x,y]$, rezulta ca $(I\otimes\varepsilon)\circ\Delta=(\varepsilon\otimes I)\circ\Delta$.

Structura de kS^*- modul stang a lui kS este definita astfel:

$$kS^*\times kS\to kS,\quad \left(f,\sum_{i=1}^{n}a_{[x_i,y_i]}\,[x_i,y_i]\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{[x_i,y_i]}\sum_{x_i\le z\le y_i}f\left([z,y_i]\right)[x_i,z]\,,\text{ pentru}$$

$$\Delta\left([x_i,y_i]\right)=\sum_{x_i\le z\le y_i}[x_i,z]\otimes[z,y_i].$$

Structura de kS^*- modul drept a lui kS este definita astfel:

$$kS\times kS^*\to kS,\quad \left(\sum_{i=1}^{n}a_{[x_i,y_i]}\,[x_i,y_i],f\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{[x_i,y_i]}\sum_{x_i\le z\le y_i}f\left([x_i,z]\right)[z,y_i]\text{ pentru}$$

$$\Delta\left([x_i,y_i]\right)=\sum_{x_i\le z\le y_i}[x_i,z]\otimes[z,y_i].$$

2. Cand este kS o coalgebra semiperfecta?

(1) **Studiul comodulelor drepte ale kS – comodului drept kS**

Structura de kS – comodul drept a coalgebrei kS este data chiar de aplicatia $\Delta : kS \to kS \otimes kS$. Fie M un subcomodul drept al kS – comodulului drept kS.

Observatie. M este si coideal drept al coalgebrei kS.

Demonstratie. Cum M este subcomodul drept al kS-comodulului kS, iar kS este kS – comodul drept prin $\Delta : kS \to kS \otimes kS$, rezulta ca M este un k –subspatiu vectorial al lui kS si $\Delta(M) \subseteq M \otimes kS$. Din definitia coidealului drept al unei coalgebre, rezulta ca Meste si coideal drept al coalgebrei kS.

Fie M un subcomodul drept al kS – comodulului drept kS. In particular Meste un subspatiu vectorial al lui kS. Cum kS are baza S, rezulta ca M are o baza formata din elementele lui S.

Observatie. Daca Madmite ca element al bazei sale pe $[x, y]$, atunci $\{[x, z] \,|x \le z \le y\}$ este multime inclusa in baza lui M.

Demostratie. Cum M este un subcomodul drept al kS – comodulului drept kS, avem $\Delta(M) \subseteq M \otimes kS$. Cum $[x, y]$ este un element al bazei lui M, deci $[x, y] \in M$, obtinem $\Delta([x, y]) \subseteq M \otimes kS$. Dar . Asadar $\sum\limits_{x \le z \le y} [x, z] \otimes [z, y] \in M \otimes kS$, deci $\{[x, z] \,|x \le z \le y\} \subset M$ si cum $M \subseteq kS$, rezulta ca mutimea $\{[x, z] \,|x \le z \le y\}$ este inclusa in baza lui M.

Spunem ca D este subcomodul drept simplu al lui kS daca singurele subcomodule ale sale sunt 0 si D. Din observatia anterioara rezulta ca subcomodulele simple ale kS- comodulului drept kS sunt $k[x, x]$, $x \in P$. Mai mult, aceste subcomodule sunt si coideale drepte ale coalgebrei kS, dar si subcoalgebre ale lui kS.

Propozitie. Fie $k[x, x]$, $x \in P$ fixat, un kS- subcomodul simplu al lui kS. Atunci anvelopa injectiva a lui $k[x, x]$ este $E(k[x, x]) = kT$, unde $T = \{[x, y] \in S \,|x \le y\}$.

Demonstratie. Aratam ca kT este un kS- comodul drept injectiv. Pentru aceasta vom arata ca kT este sumand direct al unui kS – comodul drept liber. Pentru fiecare $z \in P$ definim $T_z = \{[z, t] \,|z \le t\}$. Aratam ca $kS = \underset{z \in P}{\oplus} kT_z$. Evident $\underset{z \in P}{\oplus} kT_z \subseteq kS$. Fie acum $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{[x_i, y_i]} [x_i, y_i] \in kS$, unde $n \in \mathrm{N}^*$, $a_{[x_i, y_i]} \in k$ si $[x_i, y_i] \in S$, pentru oricare $i \in \{1, ..., n\}$. Observam ca $[x_i, y_i] \in T_{x_i}$ pentru oricare $i \in \{1, ..., n\}$, deci $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{[x_i, y_i]} [x_i, y_i] \in \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} kT_{x_i} \subseteq \underset{z \in P}{\oplus} kT_z$. Asadar $kS \subseteq \underset{z \in P}{\oplus} kT_z$. Faptul ca suma este directa este evident, deoarece pentru oricare $z_1, z_2 \in P$cu $z_1 \ne z_2$ avem $T_{z_1} \cap T_{z_2} = \phi$. Pe de alta parte kS este un kS – comodul drept injectiv, deci este sumand direct intr-un kS –comodul drept liber. Cum $kS = \underset{z \in P}{\oplus} kT_z$, iar kT este chiar multimea kT_x, rezulta ca si kT este sumand direct al unui kS – comodul liber. Deci kT este kS – comodul drept injectiv.

Aratam ca kT este anvelopa injectiva a lui $k[x, x]$. Evident ca incluziunea canonica $i : k[x, x] \to kT$ este monomorfism de kS – comodule drepte. Aratam ca $Im(i) = k[x, x]$ este subcomodul esential al lui kT, adica intersectia dintre $k[x, x]$ si orice subcomodul al lui kT este diferita de 0. Subcomodulele drepte ale lui kT sunt de forma kR unde $R = \{[x, z] \,|\exists y \in P \; a.i. \, x \le z \le y\}$. Din observatia anterioara rezulta ca intersectia dintre $k[x, x]$ si kR este diferita de 0.

2.2. Studiul kS – comodulelor drepte simple

Propozitie. Orice kS – comodul drept simplu este izomorf cu un coideal drept al lui kS.

Demonstratia rezulta din [3].

Fie Q un kS – comodul drept simplu. Fie I acel coideal al lui kS cu proprietatea ca $Q \cong I$. Din propozitia anterioara rezulta ca exista $x \in P$ astfel incat $I = k[x, x]$.

2.3. Situatii cand kS este coalgebra semiperfecta la stanga

Teorema. kS este coalgebra semiperfecta la stanga daca si numai daca anvelopa injectiva a oricarui kS – comodul drept simplu este finit dimensionala.

Demonstratia rezulta din [3].

Anvelopa injectiva a lui Q este izomorfa cu anvelopa injectiva a lui I privit ca si kS – subcomodul al lui kS. Deci $E(Q) \cong E(I)$. Dar $E(I) = kT$. Asadar $E(Q)$ este finit dimensionala atunci cand kT este finit dimensional.

Observatii: 1) Daca P este multime finita, atunci kT este finit dimensionala.

2) Daca pentru oricare $x \in P$ multimea $\{y \in P \,|x \leq y\}$ este finita, atunci kT este finit dimensionala.

2.4. Situatii cand *kS* este coalgebra semiperfecta la dreapta

Se studiaza analog cazului in care kS este coalgebra semiperfecta la stanga. Se obtin aceleasi conditii pentru multimea P ca si in cazul de coalgebra semiperfecta la stanga.

3. Filtrari pe coalgebra kS

3.1. Filtrarea coradical

Notam cu C_0 suma tuturor subcoalgebrelor simple ale lui kS.

Rezulta ca C_0 este o subcoalgebra a lui kS care se numeste *coradicalul* lui kS.

Propozitie. $C_0 = s\left({}_{kS}kS\right) = s\left(kS_{kS}\right)$, unde $s\left(kS_{kS}\right)$ este soclul lui kS in categoria M^{kS} a kS - comodulelor drepte , iar $s\left({}_{kS}kS\right)$ este soclul lui kS in categoria ${}^{kS}M$ a kS - comodulelor stangi.

Demonstratia rezulta din [3].

Definim *seria Loewy* a kS – comodulului drept (stang) kS astfel:

$C_0 = s\left({}_{kS}kS\right) = s\left(kS_{kS}\right)$ si pentru oricare $n \geq 0$ definim C_{n+1} astfel incat sa avem $s\left(kS/C_n\right) = C_{n+1}/C_n$. Obtinem sirul ascendent de subcoalgebre $C_0 \subseteq C_1 \subseteq ... \subseteq C_n \subseteq ....$

Avem $kS = \bigcup\limits_{n\geq 0} C_n$ si $\Delta\left(C_n\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$.

Asadar seria Loewy asociata coalgebrei kS este o filtrare pe kS si se numeste *filtrarea coradical.*

Propozitie. Radicalul Jacobson al lui kS^* este $J\left(kS^*\right) = C_0^{\perp}$.

Demonstratia rezulta din [4].

Observatie. Avem $C_0 = \left\{ x \in kS \,\middle|\, \exists n \in \mathrm{N}\, astfel\, incat\, x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{[m_i,m_i]}\left[m_i, m_i\right] \right\}$.

Obtinem $C_0^{\perp} = \{f \in kS^* \,|f(x) = 0, \forall x \in C_0\}$.

Deci $C_0^{\perp} = \{f \in kS^* \,|f([m, m]) = 0, \forall m \in P\}$.

Observatie. Fie $(P, \leq)$ multimea partial ordonata si $x, y \in P, x \leq y$. Notam cu $D = \{[z, t] \,|x \leq z \leq t \leq y\}$. Obtinem ca kD este un kS – subcomodul al lui kS, subcoalgebra a lui kS si coideal stang si drept al lui kS. Observam ca kD nu este coideal al lui kS deoarece $\varepsilon(kD) \neq 0$.

3.2. Filtrarea dupa lungime

Fie $[x, y]$ un element din multimea S.

Definim *lungimea elementului* $[x, y]$, notata cu $l\left([x, y]\right)$, ca fiind $l\left([x, y]\right) = n - 1$ unde n reprezinta numarul de elemente al celui mai mare lant ascendent (relativ la relatia ,,$\leq$”) de elemente din $[x, y]$.

Pentru orice numar intreg $n \geq 0$ definim C'_nca fiind k – subspatiul vectorial al lui kS generat de acele elemente $[x, y]$ cu proprietatea ca $l\left([x, y]\right) \leq n$.

Obtinem astfel sirul ascendent de subcoalgebre $C'_0 \subseteq C'_1 \subseteq ... \subseteq C'_n \subseteq ...$

Propozitie. Sirul $C'_0 \subseteq C'_1 \subseteq ... \subseteq C'_n \subseteq ...$ este o filtrare pe coalgebra kS.

Demonstratie. Pentru orice interval $[x, y] \in S$ si $z \in [x, y]$ avem $l\left([x, z]\right) + l\left([z, y]\right) \leq l\left([x, y]\right)$, deci $\Delta\left(C'_n\right) \subseteq \sum\limits_{i=0}^{n} C'_i \otimes C'_{n-i}$. Evident $kS = \bigcup\limits_{n\geq 0} C'_n$.

Definitie. Un lant $x_0 < x_1 < ... < x_n$ de elemente din multimea partial ordonata P se numeste *saturat* daca pentru orice$1 \leq i \leq n$relatia $x_{i-1} \leq y \leq x_i$ implica $y = x_{i-1}$ sau $y = x_i$.

Presupunem ca multimea noastra partial ordonata P este *graduata*, adica oricare ar fi $x, y \in P$, toate lanturile saturate din intervalul $[x, y]$ au aceeasi lungime, iar in acest caz lungimea segmentului $[x, y]$ o notam cu $r([x, y])$ si se numeste *rangul* elementului $[x, y]$.

Notam cu $C(n)$ k-subspatiul vectorial al lui kS generat de acele elemente $[x, y]$ de rang n.

Propozitie. $kS = \underset{n \geq 0}{\oplus} C(n)$ este o coalgebra graduata.

Demonstratie. Pentru oricare $[x, y] \in S$ si oricare $z \in [x, y]$ avem $r([x, z]) + r([z, y]) = r([x, y])$. Deci $\Delta(C(n)) = \sum\limits_{i=0}^{n} C(i) \otimes C(n-i)$ pentru toti $n \geq 0$. De asemenea $\varepsilon(C(n)) = 0$ pentru $n \neq 0$.

3.3. *Teorema.* Filtrarile coradical si lungime coincid.

Demonstratie. Am aratat ca $kS-$subcomodulele simple drepte ale lui kS sunt $k[x, x]$, pentru $x \in P$. Rezulta ca

$$C_0 = C_0' \tag{1}$$

Cum C_{n+1}' este subcoalgebra lui kS generata de acele elemente $[x, y]$ cu proprietatea ca $l([x, y]) \leq n+1$, iar C_n' este subcoalgebra lui kS generata de acele elemente $[x, y]$ cu proprietatea $l([x, y]) \leq n$, rezulta ca C_{n+1}'/C_n' este subcoalgebra lui kS/C_n' generata de acele clase $[\overset{\wedge}{x, y}]$ cu $l\left([\overset{\wedge}{x, y}]\right) = 1$.

Pe de alta parte $s(kS/C_n')$ este subcoalgebra lui kS/C_n' generata de acele elemente $[\overset{\wedge}{x, y}]$ cu $l\left([\overset{\wedge}{x, y}]\right) = 1$.

Asadar

$$s\left(kS/C_n'\right) = C_{n+1}'/C_n' \tag{2}$$

Din relatiile (1) si (2) si din modul de constructie al celor doua filtrari rezulta ca acestea coincid.

4. Cand este kS o coalgebra cosemisimpla?

Teorema. kS este coalgebra cosemisimpla daca si numai daca $kS = C_0$.

Demonstratia rezulta din [3] .

Observatie. kS este coalgebra cosemisimpla daca si numai daca $kS = \sum\limits_{x \in P} [x, x]$.

Propozitie. kS este coalgebra cosemisimpla daca si numai daca oricare ar fi $x, y \in P$, rezulta ca $x$nu e mai mic sau egal cu y.

Demonstratie. Din observatia anterioara avem ca kS este coalgebra cosemisimpla daca si numai daca $kS = \sum\limits_{x \in P} [x, x]$. Dar

$$kS = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{[x_i, y_i]} [x_i, y_i] \,\middle|\, [x_i, y_i] \in S, a_{[x_i, y_i]} \in k, n \in \mathrm{N}^* \right\} \text{ si}$$

$$\sum_{x \in P} k[x, x] = \left\{ \sum_{j=1}^{m} b_{[x_j, x_j]} [x_j, x_j] \,\middle|\, [x_j, x_j] \in S, b_{[x_j, x_j]} \in k, m \in \mathrm{N}^* \right\}.$$

Evident kS este coalgebra cosemisimpla daca si numai daca oricare ar fi $x, y \in P$rezulta ca $x$nu e mai mic sau egal cu y, sau altfel spus daca si nuami daca pentru oricare $x \in P$multimea $\{y \in P \,|x \leq y\}$ coincide cu multimea $\{x\}$.

5. Cand este kS o coalgebra quasi-co-Frobenius

5.1. Un sistem de generatori pentru *kS***

kS^* este un k spatiu vectorial. Sa determinam un sistem de generatori pentru acest spatiu vectorial.

Fie $[m,n] \in S$ fixat. Definim functia: $f_{[m,n]} : kS \to k$,

$$f_{[m,n]}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{[x_i,y_i]}\,[x_i,y_i]\right) = \begin{cases} a_{[m,n]},\ daca\ \exists i \in \{1,...,p\}\ a.i.\ [x_i,y_i] = [m,n] \\ 0,\ altfel \end{cases}$$

Aplicatia $f_{[m,n]}$ este morfism de k – spatii vectoriale, adica pentru oricare $a, b \in k$ si oricare $\sum_{i=1}^{p} a_{[x_i,y_i]}\,[x_i,y_i]$ si $\sum_{j=1}^{q} b_{[x_j,y_j]}\,[x_j,y_j] \in kS$ are loc relatia:

$$f_{[m,n]}\left(a\sum_{i=1}^{p} a_{[x_i,y_i]}\,[x_i,y_i] + b\sum_{j=1}^{q} b_{[x_j,y_j]}\,[x_j,y_j]\right) =$$

$$= af_{[m,n]}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{[x_i,y_i]}\,[x_i,y_i]\right) + bf_{[m,n]}\left(\sum_{j=1}^{q} b_{[x_j,y_j]}\,[x_j,y_j]\right).$$

Din modul cum a fost definita functia $f_{[m,n]}$ si din structura de k – spatiu vectorial a lui kS relatia anterioara este evidenta.

Sa aratam ca familia $\left\{f_{[m,n]}\right\}_{[m,n]\in S}$ este sistem de generatori pentru kS^*.

Fie $f \in kS^*$, deci $f : kS \to k$ si este morfism de spatii vectoriale. Aratam ca oricare ar fi $[m,n] \in S$ exista $b_{[m,n]} \in k$ astfel incat $f = \sum_{[m,n]\in S} b_{[m,n]}[m,n]$, adica aratam ca pentru oricare $\sum_{i=1}^{p} a_{[x_i,y_i]}\,[x_i,y_i] \in kS$si fiecare $[m,n] \in S$ exista $b_{[m,n]} \in k$ astfel incat sa aibe loc relatia:

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} a_{[x_i,y_i]}\,[x_i,y_i]\right) = \sum_{[m,n]\in S} b_{[m,n]} f_{[m,n]}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{[x_i,y_i]}\,[x_i,y_i]\right) \tag{3}$$

Relatia (1) devine $\sum_{i=1}^{p} a_{[x_i,y_i]} f([x_i,y_i]) = \sum_{[m,n]\in S} b_{[m,n]}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{[x_i,y_i]} f_{[m,n]}([x_i,y_i])\right)$. Pentru oricare $[m,n] \in S$ luam $b_{[m,n]} = f([m,n])$ si relatia se verifica. Observam aici ca neaparat k trebuie sa fie corp comutativ.

5.2. Cand *kS* este coalgebra quasi-co-Frobenius?

Teorema. kS este coalgebra quasi-co-Frobenius daca si numai daca kS^* este inel selfinjectiv si kS este coalgebra semiperfecta.

Demonstratia rezulta din [1].

Propozitie. kS^*este inel selfinjectiv la dreapta daca si numai daca kS este plat ca si kS^*-modul stang.

Demonstratia rezulta din [1] .

Propozitie. kS^*este inel selfinjectiv la stanga daca si numai daca kS este plat ca si kS^*-modul drept.

Demonstratia rezulta din [1] .

In continuare determinam conditiile pentru care kS este plat ca si kS^*-modul stang.

Structura de kS^*-modul stang a lui kS este data de:

$$kS^* \times kS \to kS, \quad \left(f, \sum_{i=1}^{p} a_{[x_i,y_i]}\left[x_i, y_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{p} a_{[x_i,y_i]} \sum_{x_i \le z \le y_i} f\left(\left[z, y_i\right]\right)\left[x_i, z\right], \text{ pentru}$$

$$\Delta\left(\left[x_i, y_i\right]\right) = \sum_{x_i \le z \le y_i} \left[x_i, z\right] \otimes \left[z, y_i\right]$$

Propozitie. kS este kS^*-modul stang plat daca si numai daca pentru orice ideal drept I finit generat al lui kS^*, morfismul $V : I \otimes_{kS^*} kS \to kS$, $V\left(\sum_i \lambda_i \otimes \theta_i\right) = \sum_i (\lambda_i, \theta_i)$, unde $\lambda_i \in I$ si $\theta_i \in kS$, iar (λ_i, θ_i) reprezinta actiunea lui λ_i asupra lui θ_i obtinuta din structura de kS^*-modul stand a lui kS, este monomorfism.

Demonstratia rezulta din [5] .

Cum kS^* admite sistemul de generatori $\left\{f_{[m,n]}\right\}_{[m,n]\in S}$, iar Ieste ideal drept finit generat al lui kS^*, exista atunci o familie de functii $\left\{f_{[m_i,n_i]}\right\}_{i\in\{1,...,p\}} \subset \left\{f_{[m,n]}\right\}_{[m,n]\in S}$ care este sistem finit de generatori pentru I. Fie $f \in I$, $f = \sum_{i=1}^{p} a_{[m_i,n_i]} f_{[m_i,n_i]}$, unde $a_{[m_i,n_i]} \in k$ pentru orice $i \in \{1, ..., p\}$. Fie $b = \sum_{j=1}^{t} b_{[x_j,y_j]}[x_j, y_j] \in kS$, $t \in \mathrm{N}^*$. Morfismul $V : I \otimes_{kS^*} kS \to kS$ actioneaza asupra elementelor $f$si b astfel:

$$V(f, b) = V\left(\sum_{i=1}^{p} a_{[m_i,n_i]} f_{[m_i,n_i]}, \sum_{j=1}^{t} b_{[x_j,y_j]}[x_j, y_j]\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_{[m_i,n_i]}\left(f_{[m_i,n_i]}, \sum_{j=1}^{t} b_{[x_j,y_j]}[x_j, y_j]\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_{[m_i,n_i]}\left(\sum_{j=1}^{t} b_{[x_j,y_j]}\left(\sum_{x_j \le z \le y_j} f_{[m_i,n_i]}\left([z, y_j]\right)[x_j, z]\right)\right)$$

Lema. Daca multimea S este infinita atunci morfismul V nu este monomorfism.

Demonstratie. Fie $\alpha, \beta \in kS$, $\alpha = \sum_{j=1}^{t} b_{[x_j,y_j]}[x_j, y_j]$ astfel incat oricare ar fi $i \in \{1, ..., p\}$ si orcare $j \in \{1, ..., t\}$ sa avem $[x_j, y_j] \neq [m_i, n_i]$, iar pentru orice $z \in P$ cu proprietatea $x_j \le z \le y_j$ avem $[z, y_j] \neq [m_i, n_i]$. De asemenea fie $\beta = \sum_{r=1}^{s} c_{[x_r,y_r]}[x_r, y_r]$ astfel incat oricare ar fi $i \in \{1, ..., p\}$ si oricare $r \in \{1, ..., s\}$ sa avem $[x_r, y_r] \neq [m_i, n_i]$, iar pentru orice $z \in P$ cu proprietatea $x_r \le z \le y_r$ avem $[z, y_r] \neq [m_i, n_i]$. Deoarece multimea S este infinita putem alege astfel de elemente $\alpha, \beta \in kS$.

Observam ca $f \otimes \alpha \neq f \otimes \beta$, dar $V\left(f \otimes \alpha\right) = V\left(f \otimes \beta\right) = 0$. Deci V nu este monomorfism.

Lema. Daca multimea P are cel putin doua elemente distincte $x, y \in P$, $x \le y$, atunci morfismul V nu este monomorfism.

Demonstratie. Fie I un ideal drept al lui kS^* generat de $\left\{f_{[x,x]}\right\}$, $x \in P$. Fie $f \in I$, $f = a_{[x,x]} f_{[x,x]}$. Fie $\alpha, \beta \in kS$, $\alpha = b_{[x,y]}[x, y]$ si $\beta = c_{[x,y]}[x, y]$ astfel incat $b_{[x,y]}, c_{[x,y]} \in k$ cu $b_{[x,y]} \neq c_{[x,y]}$. Atunci avem:

$$V\left(f \otimes \alpha\right) = a_{[x,x]} b_{[x,y]}\left(\sum_{x \le z \le y} f_{[x,x]}\left(\left[z, y\right]\right)\left[x, z\right]\right) =$$

$$= a_{[x,x]} b_{[x,y]}\left(f_{[x,x]}\left(\left[x, y\right]\right)\left[x, x\right] + f_{[x,x]}\left(\left[y, y\right]\right)\left[x, y\right]\right) = 0$$

$$V\left(f\otimes\beta\right)=a_{[x,x]}c_{[x,y]}\left(\sum_{x\leq z\leq y}f_{[x,x]}\left([z,y]\right)[x,z]\right)=$$

$$=a_{[x,x]}c_{[x,y]}\left(f_{[x,x]}\left([x,y]\right)[x,x]+f_{[x,x]}\left([y,y]\right)[x,y]\right)=0.$$

Se observa ca $f\otimes\alpha\neq f\otimes\beta$, dar $V\left(f\otimes\alpha\right)=V\left(f\otimes\beta\right)=0$. Deci V nu este monomorfism.

Lema. Daca pentru oricare $z\in P$ multimea $\{t\in P\,|z\leq t\}$ coincide cu multimea $\{z\}$, iar P are cel putin doua elemente distincte atunci morfismul V nu este monomorfism.

Demonstratie. Fie $x,y\in P$ doua elemente distincte. Fie I un ideal drept al lui kS^* generat de $\left\{f_{[x,x]}\right\}$. Fie $f\in I$, $f=a_{[x,x]}f_{[x,x]}$. Fie $\alpha,\beta\in kS$, $\alpha=b_{[y,y]}[y,y]$ si $\beta=c_{[y,y]}[y,y]$ astfel incat $b_{[y,y]},c_{[y,y]}\in k$ cu $b_{[y,y]}\neq c_{[y,y]}$. Avem:

$V\left(f\otimes\alpha\right)=a_{[x,x]}b_{[y,y]}f_{[x,x]}\left([y,y]\right)[y,y]=0$ si

$$V\left(f\otimes\beta\right)=a_{[x,x]}c_{[y,y]}f_{[x,x]}\left([y,y]\right)[y,y]=0.$$

Se observa ca $f\otimes\alpha\neq f\otimes\beta$, dar $V\left(f\otimes\alpha\right)=V\left(f\otimes\beta\right)=0$. Deci V nu este monomorfism.

Lema. Daca $P=\{x\}$ atunci morfismul V este monomorfism.

Demonstratie. Cum $P=\{x\}$, $S=\{[x,x]\}$, $kS=\left\{a_{[x,x]}[x,x]\,\middle|a_{[x,x]}\in k\right\}$, iar kS^* este generat de multimea $\left\{f_{[x,x]}\right\}$. Evident singurele ideale la dreapta ale lui kS^* sunt (0) si kS^*.

Daca I este indealul nul (0) al lui kS^*, atunci in mod evident morfismul V este monomorfism.

Fie I idealul la dreapta al lui kS^* generat de $\left\{f_{[x,x]}\right\}$. Fie $f\in I$, $f=a_{[x,x]}f_{[x,x]}$. Fie $\alpha,\beta\in kS$, $\alpha=b_{[x,x]}[x,x]$ si $\beta=c_{[x,x]}[x,x]$ astfel incat $\alpha\neq\beta$, deci $b_{[x,x]},c_{[x,x]}\in k$ cu $b_{[x,x]}\neq c_{[x,x]}$. Avem:

$$V\left(f\otimes\alpha\right)=a_{[x,x]}b_{[x,x]}f_{[x,x]}\left([x,x]\right)[x,x]=a_{[x,x]}b_{[x,x]}[x,x]$$

$$V\left(f\otimes\beta\right)=a_{[x,x]}c_{[x,x]}f_{[x,x]}\left([x,x]\right)[x,x]=a_{[x,x]}c_{[x,x]}[x,x].$$

Asadar pentru oricare $f\otimes\alpha,f\otimes\beta\in I\otimes_{kS^*}kS$ astfel incat $f\otimes\alpha\neq f\otimes\beta$, obtinem $V\left(f\otimes\alpha\right)\neq V\left(f\otimes\beta\right)$. Deci V este monomorfism.

Propozitie. kS este plat ca si kS^*-modul stang daca si numai daca multimea P are un singur element.

Demonstratia rezulta din lemele anterioare.

Propozitie. kS este plat ca si kS^*-modul drept daca si numai daca multimea P are un singur element.

Se demonstreaza in mod analog cazului in care kS este plat ca si kS^*-modul stang.

Teorema. kS este quasi-co-Frobenius daca si numai daca multimea $P$are un singur element.

Demonstratia rezulta din propozitiile anterioare si din studiul situatiilor in care kS este coalgebra semiperfecta la stanga.

6. Cand este kS coalgebra co-Frobenius?

Propozitie. Daca kS este coalgebra co-Frobenius, atunci kS este si coalgebra quasi-co-Frobenius.

Demonstratia este in [3] .

Din teorema anterioara stim ca kS este quasi-co-Frobenius daca si numai daca multimea P are un singur element. Vom studia daca in cazul in care P are un singur element coalgebra kS este si co-Frobenius.

Teorema. kS este coalgebra co-Frobenius daca si numai daca:

$Rat\left({}_{kS^*}kS^*\right)\cong{}_{kS^*}kS^*$ si $Rat\left(kS^*_{kS^*}\right)\cong kS^*_{kS^*}$.

Demonstratia este in [1] .

Fie $P=\{x\}$. In acest caz $S=\{[x,x]\}$, $kS=\left\{a_{[x,x]}[x,x]\,\middle|a_{[x,x]}\in k\right\}$, iar kS^* este generat de multimea $\left\{f_{[x,x]}\right\}$. Cum kS este coalgebra finit dimensionala, rezulta ca $Rat\left({}_{kS^*}kS^*\right)\cong{}_{kS^*}kS^*$ si $Rat\left(kS^*_{kS^*}\right)\cong kS^*_{kS^*}$, iar din teorema anterioara avem in mod evident ca coalgebra kS este in acest caz o colgebra co-Frobenius.

Teorema. kS este co-Frobenius daca si numai daca multimea P are un singur element.

7. Coalgebra de incidenta generalizata

7.1. Descrierea coalgebrei de incidenta generalizate

Fie Ω o familie de multimi partial ordonate, fiecare multime avand propria sa relatie de ordine (sau propria sa structura aditionala).

Definitie. O familie de multimi partial ordonate Ω se numeste *interval inchis* daca este nevida si pentru oricare $P \in \Omega$ si oricare $x, y \in P$ astfel incat $x \leq y$, rezulta ca intervalul $[x, y] \in P$.

Toate multimile partial ordonate din acest paragraf vor fi considerate intervale finite in caz ca nu se specifica altfel. Presupunem de asemenea ca orice familie sau clasa de structuri pe care o vom considera este in realitate o multime.

Daca P este un interval, notam cu 0_P elemental minimal al lui P , care este unic in acest caz, si cu 1_P elemental maximal al lui P, care de asemenea este unic.

Definitie. Fie Ω o familie interval inchis. Se numeste *relatie de ordine compatibila pe* Ω o relatie de echivalenta definite astfel:

$P \sim Q$, $P, Q \in \Omega$ daca si numai daca exista o bijectie $\varphi : P \to Q$ astfel incat $[0_P, x] \sim [0_Q, \varphi(x)]$ si $[x, 1_P] \sim [\varphi(x), 1_Q]$ pentru orice $x \in P$.

Aplicatia φ se numeste *bijectia compatibila de ordine* de la P la Q si in general depinde de P si Q .

Cel mai la indemana exemplu de relatie compatibila de ordine este izomorfismul de multimi ordonate.

In aceasta lucrare faptul ca $P \sim Q$in Ω inseamna ca exista un izomorfism de la P la Q care pastreaza structura additionala.

Observatie. Multimile partial ordonate care sunt in relatie dupa relatia compatibila de ordine nu sunt in mod necesar izomorfe. De exemplu, fie Ω multimea tuturor intervalelor care se afla incluse fie in multimea partial ordonata P_1, fie in multimea partial ordonata P_2, iar P_1 si P_2 nu sunt izomorfe. Fie $R, Q \in \Omega$. Definim:

$Q \sim R \Leftrightarrow$(Q si R sunt izomorfe) sau ($Q = P_1$) sau ($R = P_2$).

Relatia „$\sim$” este o relatie de ordine compatibila, $P_1 \sim P_2$, dar P_1si P_2 nu sunt izomorfe ca multimi partial ordonate.

Fie $k$un corp comutativ, Ω o familie interval inchis si „$\sim$” o relatie compatibila de ordine pe Ω. Pentru $P \in \Omega$ notam cu $[P]$ clasa sa de echivalenta relativ la relatia de echivalenta „$\sim$”. Daca $P = [x, y]$ vom scrie $[x, y]$ si pentru a nota pe P dar si pentru a nota clasa sa de echivalenta $[P]$ (va fi clar din context la care din cele doua notiuni ne referim). Vom nota cu $\tilde{\Omega}$ multimea factor a lui Ω relativ la relatia de echivalenta „$\sim$”.

Fie k – spatial vectorial $C(\Omega)$ generat de $\tilde{\Omega}$. Definim:

$$\Delta : C(\Omega) \to C(\Omega) \otimes C(\Omega), \quad \Delta([P]) = \sum_{x \in P} [0_P, x] \otimes [x, 1_P]$$

$$\varepsilon : C(\Omega) \to k, \quad \varepsilon([P]) = \begin{cases} 1\,, \, daca \ |P| = 1 \\ 0\,, \, altfel \end{cases} .$$

Teorema. $(C(\Omega), \Delta, \varepsilon)$ este o coalgebra.

Demonstratie. Faptul ca Δ este bine definita este o consecinta directa a faptului ca „$\sim$” este relatie de ordine compatibila.

Aratam ca urmatoarea diagrama este comutativa:

$$\begin{tikzcd}
C(\Omega) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C(\Omega)\otimes C(\Omega) \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\
C(\Omega)\otimes C(\Omega) \arrow[r, "\Delta\otimes I"'] & C(\Omega)\otimes C(\Omega)\otimes C(\Omega)
\end{tikzcd}$$

$$(\Delta\otimes I)\circ\Delta([P]) = (\Delta\otimes I)\left(\sum_{x\in P}[0_P,x]\otimes[x,1_P]\right) = \sum_{x\in P}\Delta\left([0_P,x]\right)\otimes[x,1_P] =$$

$$= \sum_{x\in P}\sum_{\substack{y\in P\\ y\le x}}[0_P,y]\otimes[y,x]\otimes[x,1_P]$$

$$(I\otimes\Delta)\circ\Delta([P]) = (I\otimes\Delta)\left(\sum_{x\in P}[0_P,x]\otimes[x,1_P]\right) = \sum_{x\in P}[0_P,x]\otimes\Delta\left([x,1_P]\right) =$$

$$= \sum_{x\in P}\sum_{\substack{y\in P\\ y\le x}}[0_P,x]\otimes[x,y]\otimes[y,1_P]$$

Observam ca $(\Delta\otimes I)\circ\Delta([P]) = (I\otimes\Delta)\circ\Delta([P])$, adica diagrama este comutativa.

Sa aratam ca si urmatoarea diagrama este comutativa:

$$\begin{tikzcd}
 & C(\Omega) \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
k\otimes C(\Omega) & & C(\Omega)\otimes k \\
 & C(\Omega)\otimes C(\Omega) \arrow[ul, "\varepsilon\otimes I"] \arrow[ur, "I\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

$$(\varepsilon\otimes I)\circ\Delta([P]) = (\varepsilon\otimes I)\left(\sum_{x\in P}[0_P,x]\otimes[x,1_P]\right) = \sum_{x\in P}\varepsilon\left([0_P,x]\right)\otimes[x,1_P] =$$

$$= [0_P,1_P] = [P]\,(I\otimes\varepsilon)\circ\Delta([P]) = (I\otimes\varepsilon)\left(\sum_{x\in P}[0_P,x]\otimes[x,1_P]\right) =$$

$$= \sum_{x\in P}[0_P,x]\otimes\varepsilon\left([x,1_P]\right) = [0_P,1_P] = [P]$$

Dupa cum observam, avem $(\varepsilon\otimes I)\circ\Delta([P]) = (I\otimes\varepsilon)\circ\Delta([P])$, deci si a doua diagrama este comutativa.

In concluzie, din $(\Delta\otimes I)\circ\Delta([P]) = (I\otimes\Delta)\circ\Delta([P])$ si $(\varepsilon\otimes I)\circ\Delta([P]) = \; = (I\otimes\varepsilon)\circ\Delta([P])$ pentru orice $[P]\in\tilde{\Omega}$ rezulta ca $(C(\Omega),\Delta,\varepsilon)$ este o coalgebra.

$(C(\Omega),\Delta,\varepsilon)$ se numeste *coalgebra de incidenta generalizata* a familiei Ω (modulo relatia „$\sim$”).

Pentru oricare $[P],[Q],[R] \in \tilde{\Omega}$ se numeste *coeficient sectiune* , notat cu $[P],[Q],[R] \in \tilde{\Omega}$ coeficientul lui din $\Delta([P])$, adica numarul de elemente $x \in P$ cu proprietatea $[0_P, x] \sim Q$ si $[x, 1_P] \sim R$. Astfel, $\Delta([P])$ poate fi scrisa ca:

$$\Delta([P]) = \sum_{[Q],[R]\in\tilde{\Omega}} (P;Q,R)\,[Q]\otimes[R],$$

si deci:

$$(\Delta\otimes I)\circ\Delta([P]) = \sum_{[T],[S]} (P;T,S)\left(\sum_{[Q],[R]} (T;Q,R)\,Q\otimes R\right)\otimes S =$$

$$= \sum_{[Q],[R],[S]} \left(\sum_{[T]} (P;T,S)\,(T;Q,R)\right) Q\otimes R\otimes S$$

$$(I\otimes\Delta)\circ\Delta([P]) = \sum_{[Q],[U]} (P;Q,U)\,Q\otimes\left(\sum_{[R],[S]} (U;R,S)\,R\otimes S\right) =$$

$$= \sum_{[Q],[R],[S]} \left(\sum_{[U]} (P;Q,U)\,(U;R,S)\right) Q\otimes R\otimes S.$$

Asadar, coasociativitatea lui Δ este echivalenta cu identitatea:

$$\sum_{[U]\in\tilde{\Omega}} (P;Q,U)\,(U;R,S) \quad = \quad \sum_{[T]} (P;T,S)\,(T;Q,R), \quad \forall [P],[Q],[R],[S]\in\tilde{\Omega}.$$

Valoarea comuna a celor doi termini ai egalitatii se noteaza cu $(P;Q,R,S)$.

In mod similar putem defini *coeficientii multisectiune* $(P;Q_1,...,Q_n)$ pentru oricare $n \geq 3$.

Urmatorul exemplu arata faptul ca coeficientii sectiune generalizeaza coeficientii binomiali.

Exemplu. (*Coalgebra binomiala*) Fie Bo familie de algebre booleene finite (adica multimi partial ordonate care sunt izomorfe cu latici de submultimi finite, ordonate cu incluziunea) si fie „$\sim$" relatia de izomorfism pe B. Daca V este o multime finita si $U \subseteq W \subseteq V$, atunci clasa de izomorfism a intervalului $[U,W]$ este unic determinata de cardinalul lui $W - U$. Daca $|W-U| = n$ atunci prin x_n notam aceasta clasa de echivalenta. Atunci coalgebra de incidenta $C(B)$ este k-spatiul vectorial $k\{x_0, x_1, x_{2,...}\}$ cu comultiplicarea Δ si counitatea ε definite astfel:

$$\Delta(x_n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x_k \otimes x_{n-k}$$

$$\varepsilon(x_n) = \begin{cases} 1\,, & daca\, n = 0 \\ 0\,, & altfel \end{cases}$$

pentru oricare $n \geq 0$. Coalgebra $C(B)$ se numeste *coalgebra binomiala.*

Definitie. Fie $(P,\leq)$ o multime partial ordonata. Notam cu $l(P)$ *lungimea* lui P , adica numarul $l(P) = n-1$, unde n este numarul de elemente al celui mai mare lant ascendent de elemente din P.

Observatie. Fie $C(\Omega)$ coalgebra de incidenta generalizata. Daca $P,Q \in \Omega$ si $P \quad\sim\quad Q$, atunci $l(P) = l(Q)$. Deci l este bine definita pe multimile din Ω.

Pentru orice numar intreg $n \geq 0$, notam cu C_n submodulul lui $C(\Omega)$ generat de acele clase $[P]$ ale lui $\tilde{\Omega}$ cu proprietatea ca $l([P]) \leq n$.

Propozitie. Daca Ω este o familie interval inchis de multimi partial ordonate cu relatia de ordine compatibila „$\sim$", atunci sirul $C_0 \subseteq C_1 \subseteq ...$ este o filtrare pe coalgebra $C(\Omega)$.

Demonstratie. Daca P este partial ordonata si $x \in P$, atunci

$$l([0_P, x]) + l([x, 1_P]) \leq l(P).$$

Rezulta $\Delta(C_n) \subseteq \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \otimes C_{n-k}$. Deci sirul $C_0 \subseteq C_1 \subseteq ...$ este o filtrare pe coalgebra $C(\Omega)$.

Definitie. Fie $(P, \leq)$ o multime partial ordonata. Un sir ascendent $x_0 < x_1 < ... < x_n$ se numeste *saturat* daca pentru orice $i = \overline{1,n}$ astfel incat $x_{i-1} \leq y \leq x_i$ sa rezulte $y = x_{i-1}$ sau $y = x_i$.

O mutime partial ordonata P se numeste *graduata* daca toate lanturile saturate dintre 0_P si 1_P au aceeasi lungime si in acest caz, acest numar, lungimea oricarui astfel de lant, se numeste lungimea lui Psau *rangul lui* P si se noteaza cu $r(P)$.

Observatie. Daca Ω este o familie interval inchis formata numai din multimi partial ordonate graduate, atunci functia rang este bine definita pe clase de echivalenta.

Pentru oricare $n \geq 0$ numar natural, fie $C(n) \subseteq C(\Omega)$ k – spatiul vectorial al lui $C(\Omega)$ generat de clasele de echivalenta $[P] \in \tilde{\Omega}$ de rang n.

Propozitie. Fie Ω o familie interval inchis de multimi partial ordonate graduate cu relatia de ordine compatibila „$\sim$". Atunci $C(\Omega) = \bigoplus\limits_{n \geq 0} C(n)$ este o coalgebra graduata.

Demonstratie. Daca P este multime partial ordonata graduata si $x \in P$ atunci $r([0_P, x]) + r([x, 1_P]) = r(P)$. Deci $\Delta(C(n)) \subseteq \sum\limits_{k=1}^{n} C(k) \otimes C(n-k)$ pentru oricare $n \geq 0$. De asemenea este evident ca $\varepsilon(C(n)) = 0$ pentru $n \neq 0$.

7.2. Coalgebra de incidenta generalizata este o coalgebra co-Frobenius la stanga

Observatie. Fie $C(\Omega)^* = Hom_k(C(\Omega), k)$. Atunci $C(\Omega)^*$ este izomorfa cu algebra de incidenta $I(\Omega)$a lui Ω.

Demonstratie. Pentru oricare $f, g \in C(\Omega)^*$ avem

$$(f * g)([P]) = \sum_{x \in P} f([0_P, x]) g([x, 1_P])$$

care este exact definitia lui $f * g$ din algebra de incidenta $I(\Omega)$.

$C(\Omega)$ are o structura de $C(\Omega)^*$ - modul stang prin:

$([P]^*, [P]) = \sum\limits_{[Q],[R] \in \tilde{\Omega}} (P; Q, R) [P]^* ([R]) [Q]$, unde

$\Delta([P]) = \sum\limits_{[Q],[R] \in \tilde{\Omega}} (P; Q, R) [Q] \otimes [R]$.

$C(\Omega)$ este o coalgebra co-Frobenius la stanga daca exista un monomorfism de $C(\Omega)^*$- module stangi de la $C(\Omega)$ la $C(\Omega)^*$. Definim

$$\alpha : C(\Omega) \to C(\Omega)^* \Leftrightarrow \alpha : C(\Omega) \to Hom_k(C(\Omega), k) \quad \Leftrightarrow$$

$\alpha([P]) : C(\Omega) \to k, \forall [P] \in C(\Omega)$ prin

$\alpha([P])([P']) = \sum\limits_{[Q],[R] \in \tilde{\Omega}} (P; Q, R) \sum\limits_{[Q],[R] \in \tilde{\Omega}} (P'; Q, R)$ pentru $\forall [P], [P'] \in C(\Omega)$.

Sa aratam ca α este morfism de $C(\Omega)^*$-module stangi, adica are loc relatia $\alpha([P]^*, [P]) = [P]^* \alpha([P])$, pentru oricare $[P] \in C(\Omega)$, $[P]^* \in C(\Omega)^*$, adica $\alpha([P]^*, [P])([S]) = ([P]^* \alpha([P]))([S])$ pentru oricare $[P], [S] \in C(\Omega)$, $[P]^* \in C(\Omega)^*$.

Fie $\Delta([P]) = \sum_{[Q],[R]\in\tilde{\Omega}} (P;Q,R)\,[Q]\otimes[R]$, $\Delta([Q]) = \sum_{[U],[V]\in\tilde{\Omega}} (Q;U,V)\,[U]\otimes[V]$, $\Delta([S]) = \sum_{[A],[B]\in\tilde{\Omega}} (S;A,B)\,[A]\otimes[B]$, $\Delta([B]) = \sum_{[C],[D]\in\tilde{\Omega}} (B;C,D)\,[C]\otimes[D]$.

$$\alpha([P]^*,[P])([S]) = \alpha\left(\sum_{[Q],[R]\in\tilde{\Omega}} (P;Q,R)\,[P]^*([R])\,[Q]\right)([S]) =$$

$$= \sum_{[Q],[R]\in\tilde{\Omega}} (P;Q,R)\,[P]^*([R]) \sum_{[U],[V]\in\tilde{\Omega}} (Q;U,V) \sum_{[A],[B]\in\tilde{\Omega}} (S;A,B)$$

$$([P]^*\alpha([P]))([S]) = \sum_{[A],[B]\in\tilde{\Omega}} (S;A,B)\,[P]^*([A])\,\alpha([P])([B]) =$$

$$= \sum_{[A],[B]\in\tilde{\Omega}} (S;A,B)\,[P]^*([A]) \sum_{Q,[R]\in\tilde{\Omega}} (P;Q,R) \sum_{C,[D]\in\tilde{\Omega}} (B;C,D).$$

Din modul in care sunt facute sumele, eventual printr-o renotare, rezulta ca $\alpha([P]^*,[P])([S]) = ([P]^*\alpha([P]))([S])$ pentru oricare $[P],[S]\in C(\Omega)$, $[P]^*\in C(\Omega)^*$, deci α este morfism de $C(\Omega)^*$-module stangi.

Analog se arata ca α este morfism de $C(\Omega)^*$-module drepte.

Sa aratam ca α este injectiv. Fie $[P],[S]\in C(\Omega)$ astfel incat $\alpha([P]) = \alpha([S])$ si vom arata ca $[P]=[S]$. Avem:

$$\alpha([P]) = \alpha([S]) \Leftrightarrow \alpha([P])\left([P']\right) = \alpha([S])\left([P']\right), \forall\,[P']\in\tilde{\Omega} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{[Q],[R]\in\tilde{\Omega}} (P;Q,R) \sum_{[Q],[R]\in\tilde{\Omega}} \left(P';Q,R\right) =$$

$$= \sum_{[Q],[R]\in\tilde{\Omega}} (S;Q,R) \sum_{[Q],[R]\in\tilde{\Omega}} \left(P';Q,R\right), \forall\,[P']\in\tilde{\Omega}$$

Relatia (1) trebuie sa aibe loc in corpul k si din acest motiv ea devine:

$$\sum_{[Q],[R]\in\tilde{\Omega}} (P;Q,R) = \sum_{[Q],[R]\in\tilde{\Omega}} (S;Q,R)$$

ceea ce implica $[P]=[S]$, deci morfismul α este injectiv (monomorfism) si in concluzie $C(\Omega)$ este o coalgebra co-Frobenius la stanga.

References

[1] J. Gomez-Torrecillas, C. Manu, C. Nastasescu, *Quasi-co-Frobenius Coalgebras II*, Communications in Algebra, Vol. 31, Nr. 10, pg. 5169-5177, 2003

[2] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics Number 82, American Mathematical Society, 1993

[3] C. Nastasescu, S. Dascalescu, S. Raianu, *Hopf Algebras - An Introduction*, New York-Basel, Marcel Dekker Inc, 2001

[4] C. Nastasescu, S. Dascalescu, S. Raianu, *Algebre Hopf*, Editura Universitatii din Bucuresti, 1998

[5] C. Nastasescu, *Inele. Module. Categorii*, Editura Academiei, Bucuresti, 1976

Department of Mathematics, Valahia University of Târgovişte,
Bd. Unirii 18-24, Târgovişte, Romania
E-mail address: neacsugeorgiana@yahoo.com